MATEMATİK

TEMEL İŞLEM YETENEĞİ, TEMEL KAVRAMLAR

Rakam: Sayıları ifade ederken kullanılan sembollere rakam denir. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

SAYI KÜMELERİ

Doğal Sayılar Kümesi (N)

$(N) = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Tam Sayılar Kümesi (Z)

$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$

$Z^- = \{-1, -2, -3...\}$

$Z^+ = \{1, 2, 3, 4...\}$

$Z = Z^- \cup Z^+ \cup \{0\}$

Rasyonel Sayılar Kümesi (Q)

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in Z \text{ ve } b \neq 0\right\}$$

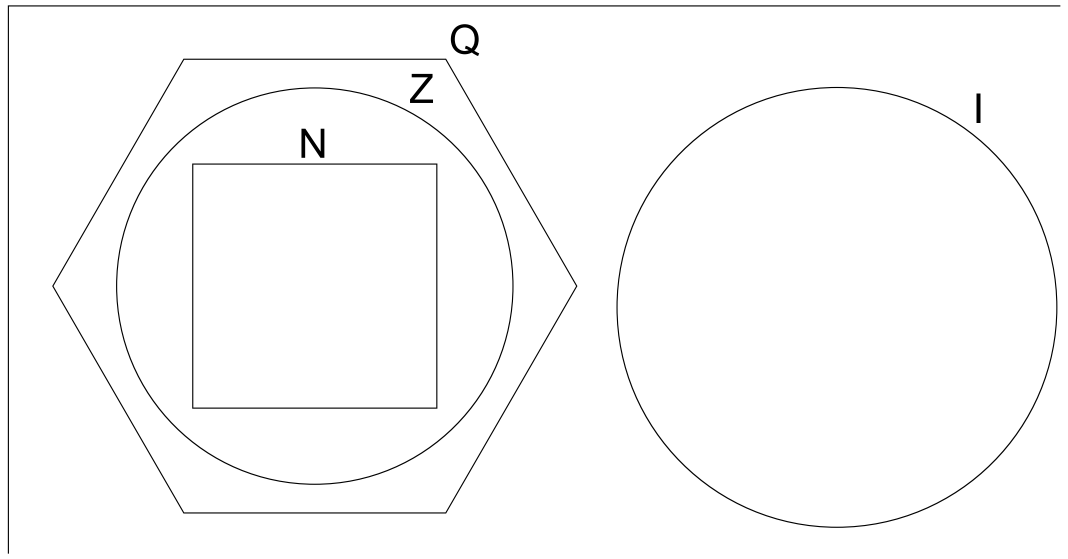
$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{2}, 4...$

İrrasyonel Sayılar Kümesi (I):

a ve b tam sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamayan sayılar. $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{11}...$

Reel Sayılar Kümesi (R):

Rasyonel ve irrasyonel sayıları kapsayan geniş sayı kümesidir.



Tam sayılar doğal sayıları, rasyonel sayılar tam sayıları kapsar. İrrasyonel sayılar ile rasyonel sayılar ayrık iki kümedir. Reel sayılar, rasyonel ve irrasyonel sayıları kapsar.

2 ile kalansız bölünen sayılara çift sayılar (2n), 2 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sayılara tek sayılar (2n–1) denir.

Tek sayılar T, çift sayılar Ç harfi ile gösterilirse;

Sonuçları Tek Olan İşlemler

$T + Ç = 1 + 4 = 5$ $\quad$ $T - Ç = 5 - 4 = 1$

$T . T = 3 . 5 = 15$

Sonuçları Çift Olan İşlemler

$T + T = 3 + 5 = 8$ $\quad$ $Ç + Ç = 12 + 6 = 18$

$T - T = 5 - 3 = 2$ $\quad$ $Ç - Ç = 12 - 6 = 6$

$T . Ç = 3 . 4 = 12$ $\quad$ $Ç . Ç = 2 . 10 = 20$

Pozitif ve Negatif Sayılar

Sıfırdan büyük sayılara pozitif (+), sıfırdan küçük sayılara negatif (–) sayılar denir.

Pozitif ve Negatif İşlem İşaretleri

$(+) + (+) = (+)$ $\quad$ $(+) . (+) = (+)$

$(-) + (-) = (-)$ $\quad$ $(-) . (-) = (+)$

$(+) . (-) = (-)$

Pozitif bir reel sayının bütün kuvvetleri pozitif, negatif bir reel sayının çift kuvvetleri pozitif tek kuvvetleri negatiftir.

Ters işaretli iki sayı toplanırken, mutlak değeri büyük olandan küçük olan çıkarılır, büyük olanın işareti yazılır.

Örnek: $(-5)+(+2)$ $\quad$ $|-5| > |+2|$ Büyük olanın işareti (–)

$5-2=3$

$=-3$

ÖRNEK

a ve b birer tam sayıdır. $a.b = 12$ ise $a + b$ en çok kaçtır?

ÇÖZÜM

a + b en çok olması için en uzak pozitif çarpanlar seçilir.

$1 . 12 = 12 \quad \rightarrow \quad 1 + 12 = 13$ olur.

ARDIŞIK SAYILAR

Ardışık Sayıların Özellikleri

- Aralarındaki fark sabit olmak üzere art arda dizilen sayılara ardışık sayılar denir.

Örnek: 1, 2, 3, 4, ...
1, 3, 5, 7, 9, ...

- Ardışık tam sayılar arasındaki fark 1'dir.
- Ardışık çift tam sayılar arasındaki fark 2'dir.
- Ardışık tek tam sayılar arasında fark 2'dir.

Ardışık Sayıların Toplamı

$$1+2+3........+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$2+4+6........+2n=n\cdot(n+1)$$

$$1+3+5..........+(2n-1)=n^2$$

Ardışık Tam sayıların Terim Sayısı

$$\frac{\text{Son terim - İlk terim}}{\text{Artış miktarı}}+1$$

ASAL SAYILAR

Asal Sayıların Özellikleri

- En küçük asal sayı 2'dir. 2'den başka çift asal sayı yoktur.
- 2, 3, 5, 7, 11, 13 .... bazı asal sayılardır.
- 1 ve kendisinden başka pozitif tam böleni olmayan 1'den büyük tam sayılara asal sayılar denir.
- Ardışık pozitif tam sayılar aralarında asaldır.

Örnek: (6, 7) (15, 16) (101, 102)

- Ardışık pozitif tek tam sayılar aralarında asaldır.

Örnek: (3, 5) (11, 13) (25, 27)

ÖRNEK

ab ve ac iki basamaklı birer tam sayıdır.

$b + c = 11$ olduğuna göre ab+ac en fazla kaçtır?

ÇÖZÜM

a en çok 9 olur. $b + c = 11$ olduğundan;

ab + ac = 191 olur.

$$\begin{array}{r} 9b \\ +\ 9c \\ \hline 191 \end{array}$$

ÖRNEK

$\frac{a}{b}=\frac{36}{54}$ a, b $\in$ N ve a ile b

aralarında asal olduğuna göre a + b kaçtır?

ÇÖZÜM

$\frac{a}{b}=\frac{6\cdot6}{6\cdot9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ $\left.\begin{matrix}a=2\\b=3\end{matrix}\right\}$ olur $2+3=5$

Bir Doğal Sayının Asal Çarpanları ve Bir Doğal Sayının Bölen Sayıları

A bir doğal sayı x, y, z asal sayı ve k, l, m birer pozitif tam sayı olmak üzere;

$A=x^k\cdot y^l\cdot z^m$ biçiminde yazılırsa x, y, z sayıları A sayısının asal çarpanlarıdır.

A'nın pozitif tam bölen sayısı; $(k+1)\cdot(l+1)\cdot(m+1)$

A'nın negatif tam bölen sayısı; $(k+1)\cdot(l+1)\cdot(m+1)$

- Bir doğal sayının negatif tam bölenleri pozitif tam bölenlerinin ters işaretlisidir.
- Bir doğal sayının pozitif ve negatif bölenlerinin toplamı "sıfır" olur.

FAKTÖRİYEL

Tanım: 1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına n faktöriyel denir. n! biçiminde gösterilir.

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$$\begin{aligned} 5! &= 4! \cdot 5 \\ &= 3! \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \end{aligned}$$

Özellik: $n! = (n-1)! \cdot n$

$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

$(n+2)! = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

BÖLME - BÖLÜNEBİLME - EBOB - EKOK

BÖLME İŞLEMİ

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} & C \\ \hline K & \end{array}$$

A: Bölünen **B:** Bölen

C: Bölüm **K:** Kalan

A, B, C, K birer tam sayı $B \neq 0$ ve $K \geq 0$ olmak üzere;

$A = B \cdot C + K$ olur.

Bölme ve Bölünebilme Özellikleri

$K = 0$ olduğunda A, B'ye tam bölünür.

$0 \leq K < B$'dir.

M, N, x, y, z birer tam sayı olmak üzere;

$$\begin{array}{r|l} M & x \\ \cline{2-2} - & \\ \hline y & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} N & x \\ \cline{2-2} - & \\ \hline z & \end{array}$$

olduğundan;

$$\begin{array}{r|l} M + N & x \\ \cline{2-2} - & \\ \hline y + z & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} M \cdot N & x \\ \cline{2-2} - & \\ \hline y \cdot z & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} M^N & x \\ \cline{2-2} - & \\ \hline y^z & \end{array}$$

olur.

BÖLÜNEBİLME KURALLARI

2 İle Bölünebilme	• Birler basamağı (0, 2, 4, 6, 8) olan sayılar 2 ile kalansız bölünür.
3 İle Bölünebilme	• Rakamları toplamı 3'ün katı olan sayılar 3 ile kalansız bölünür.
4 İle Bölünebilme	• Son iki basamağı 0 veya 4'ün katı olan sayılar 4'e kalansız bölünür.
5 İle Bölünebilme	• Birler basamağı 0 veya 5 olan sayılar 5'e kalansız bölünür.
6 İle Bölünebilme	• 2 ve 3 ile kalansız bölünen sayılar 6 ile kalansız bölünür.
8 İle Bölünebilme	• Son üç basamağı 0 veya 8'in katı olan sayılar kalansız 8'e bölünür.
9 İle Bölünebilme	• Rakamları toplamı 9'un katı olan sayılar 9'a kalansız bölünür.
10 İle Bölünebilme	• Birler basamağı "0" olan sayılar 10'a kalansız bölünür.

ÖRNEK

ab iki basamaklı sayısı 2'ye tam bölünüp 5'e bölündüğünde 1 kalanını verdiğine göre a + b en çok kaçtır?

ÇÖZÜM

5'e bölündüğünde 1 kalanını veren çift sayı olduğuna göre b = 6 olmalıdır.

En çok 9 + 6 = 15 olur.

ÖRNEK

358a sayısı 6 ile kalansız bölünüyor ise a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

a yerine 2 ve 8 gelebilir.

2 + 8 = 10'dur.

ÖRNEK

23 basamaklı 123123123...... sayısının 9'a bölümünden kalan kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\frac{21}{3}\cdot(1+2+3)+1+2$$

$$45=9\cdot 5$$

olduğundan kalan "0" dır.

ÖRNEK

1453 sayısının 4 ile bölümünden kalan kaçtır?

ÇÖZÜM

Son iki basamağı bölmek yeterlidir.

$$\begin{array}{r|l} 53 & 4 \\ \cline{2-2} -4 & 13 \\ \cline{1-1} 13 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

kalan 1'dir.

EBOB - EKOK

Ebob

İki veya daha fazla doğal sayıyı ortak bölebilen en büyük sayıya en büyük ortak bölen (EBOB) denir.

Ekok

İki veya daha fazla sayıya aynı anda bölünebilen en küçük sayıya en küçük ortak kat (EKOK) denir.

Ebob - Ekok Özellikleri

- $A < B$ olmak üzere;

EBOB $(A, B) \leq A$

EKOK $(A, B) \geq B$

- A, B aralarında asal ise;

EBOB $(A, B) = 1$

EKOK $(A, B) = A.B$

$A = x \cdot m$, $B = x \cdot n$ ve m ile n aralarında asaldır.

- EBOB $(A, B) \cdot$ EKOK $(A, B) = A \cdot B$

- $\text{EBOB}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{EBOB}(a,c)}{\text{EKOK}(b,d)}$

- $\text{EKOK}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{EKOK}(a,c)}{\text{EBOB}(b,d)}$

ÖRNEK

$A \cdot B = 60$

$EBOB(A, B) = 5$ ise $EKOK(A, B) = ?$

ÇÖZÜM

$EKOK(A, B) = \frac{A \cdot B}{EBOB(AB)} = \frac{60}{5} = 12'$dir.

ÖRNEK

Ortak katlarının en küçüğü 12 olan, iki farklı sayının toplamı en çok kaçtır?

ÇÖZÜM

1. sayı: 12

2. sayı: 6

$12 + 6 = 18$'dir.

ÖRNEK

Boyutları 2 cm, 3 cm ve 5 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki kutular yan yana ve üst üste konularak en küçük hacimli küp yapılmak isteniyor.

En az kaç kutu gereklidir?

ÇÖZÜM

$EKOK(2, 3, 5) = 30$ (küpün bir kenarı)

Kutu Sayısı$= \frac{\text{Küp hacmi}}{\text{Kutu hacmi}}$

Kutu Sayısı $= \frac{30 \cdot 30 \cdot 30}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 15 \cdot 10 \cdot 6 = 900$

ÖRNEK

Bir vitrindeki lambalar 5 saniye, 8 saniye ve 10 saniyede bir yanmaktadır. Üçü birlikte saat 10 da birlikte yandıklarına göre, birlikte yirmi beşinci yanışlarını saat kaçta yaparlar?

ÇÖZÜM

EKOK(5, 8, 10) = 40 saniyede bir birlikte yanar.

İlk yanışları saat 10 da olduğuna göre, yirmi beşinci yanışları,

$24 \cdot 40 = 960$ saniye sonra olur.

$960 : 60 = 16$ dakika sonra olur.

10.16 olur.

ÖRNEK

Bir mağazada sabit bir fiyatla 1. gün 540 liralık, 2. gün 420 liralık ve 3. gün 240 liralık gömlek satılıyor.

En az kaç gömlek satılmıştır?

ÇÖZÜM

EBOB(540, 420, 240) = 60 (bir gömleğin fiyatı)

$540 : 60 = 9$

$420 : 60 = 7$

$240 : 60 = 4$

$9 + 7 + 4 = 20$

RASYONEL SAYILAR

Rasyonel Sayıların Özellikleri

- a ve b birer tam sayı ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ biçiminde ifade edilen sayılara rasyonel sayı denir. Rasyonel sayılar kümesi Q ile gösterilir.

$Q = (\frac{a}{b}$: a ve b tam sayı ve $b \neq 0)$'dır.

$\frac{a}{b}$ rasyonel sayısında a'ya pay, b'ye payda denir.

- Rasyonel sayılar kesir olarak adlandırılır. Kesirleri bir bütünün parçalarından bir kısmını ifade etmek amacıyla kullanırız.
- $\frac{a}{b}$ ifadesinde $|a| < |b|$ ise; $\frac{a}{b}$ kesrine **basit kesir** denir.
- $\frac{a}{b}$ ifadesinde $|a| \geq |b|$ ise; $\frac{a}{b}$ kesrine **bileşik kesir** denir.
- $\frac{a}{b}$ kesrinin önünde c gibi bir tam sayı var ise $c\frac{a}{b}$ ifadesine **tam sayılı kesir** denir.

- $\frac{a}{b}$ bileşik kesri için $\begin{array}{r|l} a & b \\ \underline{-\quad} & c \\ d & \end{array}$ ise $\frac{a}{b} = c + \frac{d}{b}$ biçiminde tam sayılı kere dönüşür.
- $\frac{a}{b}$ kesrinde pay ve payda aynı sayı ile çarpılırsa kesrin değeri değişmez $\left(\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x}\right)$ bu işleme **genişletme** denir.
- $\frac{a}{b}$ kesrinde pay ve payda aynı sayı ile bölünürse kesrin değeri değişmez $\frac{a}{b} = \frac{a \div x}{b \div x}$ bu işleme **sadeleştirme** denir.

"İnsanoğlunun değeri bir kesirle ifade edilecek olursa; payı gerçek kişiliğini gösterir, paydası da kendini ne zannettiğini payda büyüdükçe kesrin değeri küçülür."

Lev Tolstoy

Rasyonel Sayılarda Dört İşlem

Toplama	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$
Çıkarma	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$
Çarpma	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
Bölme	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Rasyonel Sayılarda Sıralama

- Paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan payı büyük olan rasyonel sayı daha büyüktür.

Örnek: $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$

$\frac{25}{121} > \frac{14}{121}$

- Pay ve paydaları arasındaki fark sabit olan pozitif basit kesirlerde payı büyük olan kesir daha büyüktür.

Örnek: $\frac{12}{13} > \frac{9}{10}$

$\frac{17}{19} > \frac{1}{3}$

- Payları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan paydası küçük olan rasyonel sayı daha büyüktür.

- Pay ve paydaları arasındaki fark sabit olan pozitif bileşik kesirlerde, payı küçük olan kesir daha büyüktür.

Örnek: $\frac{99}{89} < \frac{70}{60}$

$\frac{101}{100} < \frac{2}{1}$

ONDALIK SAYILAR

Paydası 10 sayısının pozitif kuvvetleri olan rasyonel sayılara ondalık sayılar denir.

$\frac{25}{10} = 2,5 \qquad 3\frac{15}{100} = 3,15 \qquad \frac{2}{1000} = 0,002 \qquad \frac{517}{1000} = 0,517$

321,579

- Binde birler basamağı
- Yüzde birler basamağı
- Onda birler basamağı
- Birler basamağı
- Onlar basamağı
- Yüzler basamağı

Ondalık Sayıların Özellikleri

- Ondalık sayılarda toplama – çıkarma işlemi yapılırken en küçük basamaktan başlanarak sırasıyla aynı basamaklar toplanır. (virgüller hizalı olmalıdır)
- Rasyonel sayı ondalık sayıya çevrilirken payı, paydaya böleriz.
- Ondalık sayılarda çarpma işlemi yapılırken, virgül yokmuş gibi çarpma yapılır. Sonuçtan sağdan sola doğru çarpılan sayılardaki virgülden sonraki toplam basamak kadar sonra virgül konur.
- İki tam sayının bölünmesi ile elde edilen ondalık sayının virgülden sonraki bölümü düzenli tekrar eden sayılar ise bu sayıya **devirli ondalık sayı** denir.
- Ondalık sayılarda bölme işlemi yapılırken verilen kesirler virgülden kurtulacak şekilde genişletilir sonra bölme işlemi yapılır.

Örnek: $\frac{1,2}{0,12}+\frac{32}{3,2}$

$=\frac{120}{12}+\frac{320}{32}$

$=10+10$

$=20$

- Devirli ondalık sayının rasyonel sayıya çevrilmesi;

$$\frac{\text{Pay}}{\text{Payda}}=\frac{\text{Sayının tamamı - Devretmeyen sayı}}{\underbrace{\text{Devreden rakam kadar (9), Devretmeyen kadar (0)}}_{\text{(Virgülden sonraki rakamlar)}}}$$

ÖRNEK

$3,\overline{75}$ sayısını rasyonel sayıya çeviriniz.

ÇÖZÜM

$3,\overline{75}=\frac{375-3}{99}=\frac{372}{99}=\frac{124}{33}$ bulunur.

ÖRNEK

$2,5\overline{6}$ ifadesinin eşiti nedir?

ÇÖZÜM

$2,5\overline{6}=\frac{256-25}{90}=\frac{\cancel{231}^{77}}{\cancel{90}_{30}}=\frac{77}{30}$

ÖRNEK

$\dfrac{1,\overline{4}+2,\overline{2}}{0,0\overline{7}}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

Öncelikle devirli ondalıklı sayıları rasyonel sayıya çevirelim.

$$\dfrac{\dfrac{14-1}{9}+\dfrac{22-2}{9}}{\dfrac{7-0}{90}}=\dfrac{\dfrac{13}{9}+\dfrac{20}{9}}{\dfrac{7}{90}}$$

$$=\dfrac{\dfrac{33}{9}}{\dfrac{7}{90}}=\dfrac{33}{\cancel{9}_1}\cdot\dfrac{\cancel{90}^{10}}{7}$$

$$=\dfrac{330}{7}$$

ÖRNEK

$\dfrac{0,6}{5}\cdot\dfrac{0,5}{4}\cdot\dfrac{1}{3}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\dfrac{0,6}{5}\cdot\dfrac{0,5}{4}\cdot\dfrac{1}{3}$$

$$=\dfrac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{50}^{10}}\cdot\dfrac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{40}^{20}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{3}^{1}}\Rightarrow=\dfrac{1}{200}$$

DENKLEM ÇÖZME - EŞİTSİZLİK, MUTLAK DEĞER

DENKLEMLERİN ÖZELLİKLERİ

- Denklemi sağlayan x değerine **denklemin kökü** denir.
- Denklemin köklerinden oluşan kümeye **çözüm kümesi** denir.
- Kapalı aralık;

$a \leq x \leq b$

$[a.b]$

- Açık aralık;

$a < x < b$

(a,b)

- Yarı açık aralık;

$a \leq x < b$

$[a,b)$

BİRİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

- $a, b \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere;

$ax + b = 0$ ifadesine birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

$ax + b = 0$ ise $ax = -b \rightarrow x = \frac{-b}{a}$ denklemin köküdür.

Denklemin çözüm kümesi: $Ç = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$

BİRİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMDE KÖKLERİN VARLIĞI

$ax + b = 0$ ise $x = -\frac{b}{a}$'dır. Öyleyse;

I. $a \neq 0$ iken denklemin bir tane kökü vardır.

II. $a = 0$ ve $b \neq 0$ iken $x = -\frac{b}{0}$ olur. Bu tanımsızdır denklemin kökü yoktur.

III. $a = 0$ ve $b = 0$ iken $0 \cdot x + 0 = 0$ olur. x yerine bütün reel sayılar yazılabilir. Denklemin sonsuz çözümü vardır. $Ç = R$

BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

- $a, b, c \in R$ $\quad$ a ve $b \neq 0$ olmak üzere; $ax + by + c = 0$ denklemine birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir.
- İki ya da daha fazla birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemden oluşan sisteme denklem sistemi denir.
- $ax + by + c = 0$ ve $dx + ey + f = 0$ denklem sistemi için;

I. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ olduğunda denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.

II. $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ olduğunda denklem sisteminin bir tane çözümü vardır.

III. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ olduğunda denklem sisteminin çözümü yoktur.

BİRİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜM METODLARI

1.Yok Etme Metodu

Verilen iki denklemdeki değişkenlerden birinin katsayısı eşitlenir ve taraf tarafa çıkarılırsa değişkenlerden biri yok edilir ve denklem çözülür.

2. Yerine Koyma Metodu

Verilen denklemdeki değişkenlerden biri diğeri cinsinden yazılır ve ikinci denklemde yerine koyularak denklem çözülür.

3. Karşılaştırma Metodu

Her iki denklemdede aynı değişken yalnız bırakılarak birbirine eşitlenir ve denklem çözülür.

BASİT EŞİTSİZLİKLER

- a ve b birer reel sayı olmak üzere iki sayının birbirine göre üç durumu vardır.

I. $a < b$ küçüktür.

II. $a = b$ eşittir.

III. $a > b$ büyüktür.

İki durumun birleşimi ile $\leq$ küçük eşit, $\geq$ büyük eşit oluşur.

Basit Eşitsizliklerin Özellikleri

- $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$'dir.
- Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenir ya da çıkarılırsa eşitsizlik değişmez. $a < b$ ise $a \mp x < b \mp x$'dir.
- Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif sayı ile çarpılır ya da bölünürse eşitsizlik değişmez.
  $x > 0$ için $a > b$ ise $a \cdot x > b \cdot x$
- Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif sayı ile çarpıldığında veya bölündüğünde eşitsizlik yön değiştirir.
  $x < 0$ iken $a < b$ ise $a \cdot x > b \cdot x$
- Her iki tarafı aynı işaretli eşitsizliklerin çarpma işlemine göre tersi alındığında eşitsizlik yön değiştirir. Farklı işaretli iseler yön değiştirmez.

$a \cdot b > 0$ ve $a < b$ iken $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$a \cdot b < 0$ ve $a < b$ iken $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

- $a^x < a^y$ eşitsizliğinde; $a > 1$ iken $x < y$
  $0 < a < 1$ iken $x > y$ olur.

- $a^2 < a$ ise $0 < a < 1$
  $a^2 > a$ ise $a > 1$ veya $a < 0$ olur.

- Eşitsizliklerde taraf tarafa toplama yapılır. Ancak çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri için eşitsizliğin özellikleri dikkate alınmalıdır.

ÖRNEK

$2x + 3 > 5$ olduğuna göre, x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri nedir?

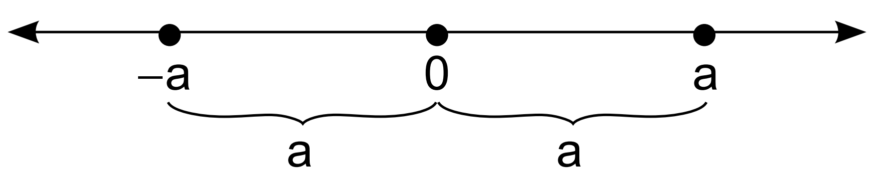
ÇÖZÜM

Bu eşitsizliği çözmek için bilinen ve bilinmeyenleri bir tarafa toplayıp x'i yalnız bırakalım

üüüüü $> \quad \rightarrow \quad > \; - \quad \rightarrow \quad > \quad \rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} > \frac{2}{2} \rightarrow x > 1$ olup x'in alabileceği en küçük tam sayı değeri 2'dir.

MUTLAK DEĞER

- Bir sayının başlangıç noktasına (0) olan uzaklığına o sayının mutlak değeri denir.



$|-a| = |a| = a$

Mutlak Değer Özellikleri

- $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
- Mutlak değer içindeki ifade pozitif ise dışarıya aynı hali ile çıkar, negatif ise (–) ile çarpılarak çıkar.
- $x \in R$ olmak üzere $|x| \geq 0$'dır. Mutlak değerli ifade (–) olmaz.
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|-x| = |x|$
- $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$

  $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$
- $a, b \in R$ ve $b \neq 0$ olmak üzere; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

ÖRNEK

$a < 0 < b$ ise $|a| + |b| + |a - b|$ nedir?

ÇÖZÜM

Öncelikle mutlak değer içindeki sayıların işaretlerini belirlemeliyiz.

$a < 0$ ise a negatiftir. O halde $|a| = -a$ olur.

$0 < b$ ise b pozitiftir. O halde $|b| = b$ olur.

$a < b$ ise $a - b$ elde etmek için b'yi diğer tarafa atalım, o halde;

$a - b < 0$ olur. $a - b$ negatiftir. O halde;

$|a - b| = -(a - b) = -a + b$ olur. Şimdi bulunanları yerine yazalım;

$|a| + |b| + |a - b| = -a + b - a + b = 2b - 2a$ bulunur.

ÜSLÜ SAYILAR - KÖKLÜ SAYILAR

ÜSLÜ SAYILAR

$a^n \rightarrow$ üs (kuvvet)

$a^n \rightarrow$ alt (taban)

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{n tane}} = a$$

n tane a sayısının kendisi ile tekrarlı çarpımı ile oluşan a^n sayısına üslü sayı denir. a taban, n üst olarak isimlendirilir.

Üslü Sayıların Özellikleri

- 0 hariç bütün sayıların 0. kuvveti 1'dir.
  $10^0 = 1$ $5^0 = 1$ $(-3)^0 = 1$
- 0^0 belirsizdir.
- Bütün sayıların 1. kuvveti sayının kendisine eşittir.
  $7^1 = 7$ $13^1 = 13$ $(-4)^1 = -4$
- Bir sayının negatif kuvveti o sayının çarpma işlemine göre tersidir. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
- Negatif sayıların çift kuvvetleri pozitif, tek kuvvetleri negatifdir.
- $\left(a^k\right)^l = a^{k \cdot l}$ kuvvetin kuvveti alınırken, kuvvetler çarpılır.

- Üs olarak bilinmeyeni bulunan denklemlere **üslü denklemler** denir. $a^x + b^y = c$
- Kuvvetleri aynı olan üslü sayılar bölünürken tabanlar bölünür ortak üs bölümün kuvveti olarak yazılır. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ dir.
- Tabanları aynı olan sayılar bölünürken bölünen sayının kuvvetinden bölen sayının kuvveti çıkarılır, ortak taban yazılır. $\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}$
- Kuvvetleri aynı olan üslü ifadeler çarpılırken, tabanlar çarpılır, ortak üs yazılır. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- Tabanları aynı olan üslü ifadeler çarpılırken kuvvetler toplanır, ortak taban yazılır. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$ olmak üzere;
  $a^x = a^y$ ise $x = y$'dir.
- $n \neq 1$ ve n tek sayı ve n sıfırdan farklı bir sayı ise
  $x^n = y^n$ ise $x = y$'dir. (n tek)
  $x^n = y^n$ ise $x = y$ veya $x = -y$ olur. (n çift)
- $\left.\begin{matrix} x^a = y^n \\ x^b = y^k \end{matrix}\right\} \frac{a}{b} = \frac{n}{k}$

Üslü İfadelerde Toplama

Üslü ifadelerde toplama yaparken taban ve üs aynı olmalıdır.

$$\underbrace{a^n + a^n + ...a^n}_{x} = x \cdot a^n$$

$$2^5 + 2^5 + 2^5 = 3 \cdot 2^5$$

Üslü İfadelerde Çıkarma

Taban ve kuvvetleri aynı olan sayılar arasında çıkarma işlemi yapılır.

$$k \cdot a^n - l \cdot a^n = (k - l) \cdot a^n$$

$$5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^2 = (5 - 4)3^2 = 3^2$$

Üslü İfadelerde Sıralama

$a = 8^4$, $b = 4^8$, $c = 16^3$ sayılarını sıralayalım.

$$a = 8^4 = \left(2^3\right)^4 = 2^{12}$$

$$b = 4^8 = \left(2^2\right)^8 = 2^{16}$$

$$c = 16^3 = \left(2^4\right)^3 = 2^{12}$$

$a = c < b$'dir.

ÖRNEK

$$\left.\begin{aligned} 2^3 &= 3^a \\ 3^4 &= 2^b \end{aligned}\right\} \text{ ise } a \cdot b = ?$$

ÇÖZÜM

$\dfrac{3}{b} = \dfrac{a}{4}$ $\qquad a \cdot b = 3 \cdot 4 = 12$'dir.

ÖRNEK

$$\frac{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{-\frac{1}{8}} \rightarrow \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{1}{8}} \rightarrow \frac{9}{4} \cdot (-8) = -18$$

KÖKLÜ SAYILAR

- $a \in R$ ve $n \in N^+$ olmak üzere; $x^n = a$

eşitliğini sağlayan $x = \sqrt[n]{a}$ reel sayısına **a'nın n. dereceden kökü** denir. $\sqrt[n]{a}$ n. dereceden kök a diye okunur.

- $\sqrt{a}$ ifadesinde kökün derecesi 2 dir. Karekök a veya kök a diye okunur.
- $\sqrt[3]{a}$ ifadesi 3. dereceden kök a ya da küp kök a diye okunur.
- Hiç bir reel sayının çift kuvveti negatif olamaz, dolayısı ile çift kuvvetli kök içerisindeki negatif sayının belirttiği ifade reel değildir.

- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a \qquad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$
- $x^n = a$ ise $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt{a \mp 2\sqrt{b}}$ ifadesinde;

  $b = m \cdot n \quad a = m + n$ oluyorsa;

  $\sqrt{a \mp 2\sqrt{b}} = \sqrt{m} \mp \sqrt{n}$

Kök İçindeki Sayıyı Kök Dışına Çıkarma

- $\forall n \in Z^+$ ve $a \geq 0$ olmak üzere; $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b}$ eşitliği vardır.

Köklü İfadelerde Toplama İşlemi

- Aynı olan köklü ifadeler arasında toplama yapılır.

$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x + y) \cdot \sqrt[n]{a}$

Köklü İfadelerde Çıkarma İşlemi

- Aynı olan köklü ifadeler arasında çıkarma yapılır.

$x\sqrt[n]{a} - y\sqrt[n]{a} = (x - y) \cdot \sqrt[n]{a}$

Köklü Sayılarda Çarpma

- Kök dereceleri aynı olan terimler çarpılabilir.

$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

Köklü Sayılarda Bölme

- Kök dereceleri aynı olan terimler bölünebilir.

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

Kök Derecesinin Genişletilmesi

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot x}{n \cdot x}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot x]{a^{m \cdot x}}$$

Köklü İfadelerde Eşlenik

- Çarpımları rasyonel sayı olan iki köklü ifadeden her birine diğerinin eşleniği denir.

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x \qquad \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = x - y$$

Örnek: Kök derecesi aynı olanlar;

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

Örnek: Kök derecesi farklı olan ifadeler çarpılmaz.

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{5}$$

Örnek: $\sqrt{10}:\sqrt{2}=\sqrt{10:2}=\sqrt{5}$

$$\frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\frac{64}{4}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$$

Örnek: $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(2+5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

$$\sqrt{48}+\sqrt{27}=\sqrt{16\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}\Rightarrow\sqrt{4^2\cdot 3}+\sqrt{3^2\cdot 3}$$

$$=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}\Rightarrow(4+3)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$$

Örnek: $\sqrt{75}$ sayısını $a\sqrt{b}$ biçiminde yazalım.

$$\sqrt{75}=\sqrt{5\cdot 5\cdot 3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=5\sqrt{3}$$

ÖRNEK

$a=2\sqrt[3]{5}$, $b=3\sqrt{2}$, $c=\sqrt[6]{219}$ sayıları arasındaki doğru sıralama nasıldır?

ÇÖZÜM

Bu tür sorularda köklerinin dereceleri eşitlenmeye çalışılır. Unutmamamız gereken nokta dereceyi çarptığımız sayıyla kökün içerisindeki ifadenin de üssünün çarpılmasıdır.

$$a=\sqrt[3]{8\cdot 5}\rightarrow a=\sqrt[3]{40}\rightarrow a=\sqrt[6]{40^2}=\sqrt[6]{1600}$$

$$b=\sqrt{9\cdot 2}\rightarrow b=\sqrt{18}\rightarrow b=\sqrt[6]{18^3}=\sqrt[6]{5832}$$

$$c=\sqrt[6]{219}$$

$$\sqrt[6]{219}<\sqrt[6]{1600}<\sqrt[6]{5832}\rightarrow c<a<b$$

ÇARPANLARA AYIRMA VE ÖZDEŞLİKLER

ÇARPANLARA AYIRMA YÖNTEMLERİ

Ortak Çarpan Parantezine Alma

- Cebirsel ifadede her bir terimde ortak olan çarpanlar bir araya getirilerek ortak olmayan çarpanlar parantez içine yazılır.

Örnek: $x \cdot a + x \cdot b = x(a+b)$

$4xy^2 + 8x^2y - 12xy = 4xy(y + 2x - 3)$

Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma

- Cebirsel ifadenin tüm terimlerinde ortak olan bir çarpan yoksa, ortak çarpanı bulunan terimler bir araya getirilerek bu terimlerle elde edilen her grup kendi arasında ortak çarpan parantezine ayrılır.

Örnek: $a^2 + bc - ab - ac = a(a-b) - c(a-b)$

$= (a-b)(a-c)$

$ax^2 + bx + c$ Biçimindeki Üç Terimli İfadelerin Çarpanlara Ayrılması

$ax^2 + bx + c$ ifadesinde;

$a = p \cdot q, \quad c = m \cdot n \quad$ ve $\quad b = pn + qm \quad$ ise

$ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$

$$\begin{array}{ccc} p & & m \\ & \times & \\ q & & n \end{array}$$

Örnek: $x^2 + \underbrace{8x}_{3+5} + \underbrace{15}_{3 \cdot 5} = (x + 3)(x + 5)$

$x^2 + bx + c$ ifadesinde; $\quad b = m + n$ ve $c = m \cdot n \quad$ ise;

$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$

$$\begin{array}{ccc} x & & m \\ & \times & \\ x & & n \end{array}$$

Örnek: $6x^2 + 29x + 35 = (2x + 5)(3x + 7)$

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 7 \\ & \times & \\ 2 & & 5 \end{array}$$

$2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 29$

ÖZDEŞLİKLERDEN FAYDALANARAK ÇARPANLARA AYIRMA

Tam Kare Özdeşlik

Birincinin karesi, birinci ve ikinci çarpımının iki katı, ikincisinin karesi;

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

İki Kare Özdeşliği

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a - b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$$

Küp Özdeşlik

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Bir tam karenin alabileceği en küçük değer “0”dır.

ÖRNEK

$\dfrac{x^2+2x-63}{x^2-49}$ ifadesinin en sade biçimi nedir?

ÇÖZÜM

$$\frac{(x+9)\cdot(x-7)}{(x+7)\cdot(x-7)}=\frac{x+9}{x+7}$$

ÖRNEK

$x^2-4x+y^2+10y+29=0$ ise x + y toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$$x^2-4x+y^2+10y+4+25=0$$

$$x^2-4x+4+y^2+10y+25=0$$

$$(x-2)^2+(y+5)^2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ y+5=0 \rightarrow y=-5 \end{array}\right\} x+y=2-5=-3$$

ORAN - ORANTI

ORAN VE ORANTI

- Sayı belirten çoklukların bölme yoluyla karşılaştırılmasına oran denir.
- En az iki oranın eşitliğine orantı denir.

Oran ve Orantı Özellikleri

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ifadesi bir orantıdır ve bu orantının sabiti k'dır.
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ orantısında $a \cdot d = b \cdot c$'dir. Bu çarpıma içler dışlar çarpımı denir.
- Oranlanan çoklukların birimleri farklı ise birimli oran, aynı ise birimsiz oran adı verilir.
- a, b, c sayıları sırasıyla x, y, z ile doğru orantılı ise;

$a : b : z = x : y : z$ veya $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$

- a, b, c sayıları sırasıyla x, y, z sayıları ile ters orantılı ise;

  $a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z = k$ ise; $a = \frac{k}{x}$, $b = \frac{k}{y}$, $c = \frac{k}{z}$

- a, b, c sayıları ile dördüncü orantılı sayı x ise; $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

- a ve b ile orta orantılı olan sayı x ise; $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise; $a \cdot d = b \cdot c$'dir. İçler dışlar çarpımı eşittir.

- Orantıda içler ve dışlar kendi aralarında yer değiştirebilir.

  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ veya $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ veya $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ orantısında; $a = b \cdot k$, $c = d \cdot k$, $e = f \cdot k$

- $x, y \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise; $\frac{a \mp c}{b \mp d} = k$ $\frac{xa \mp yc}{xb \mp yd} = k$

  $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = k^n$ $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = k^2$

ORANTI ÇEŞİTLERİ

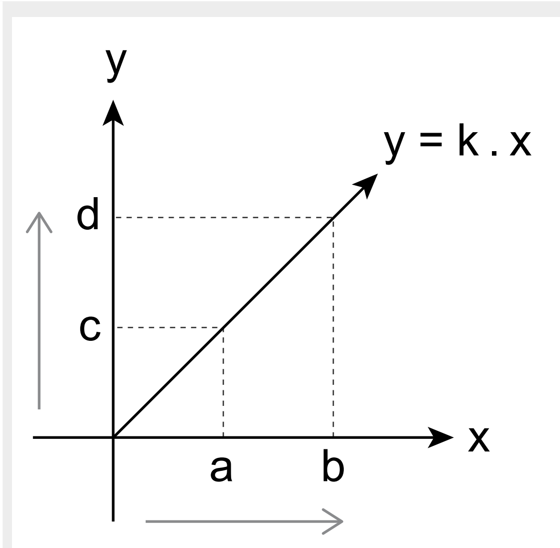
Doğru Orantı

- İki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyor ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyorsa bu iki çokluk doğru orantılıdır.
- x ile y doğru orantılı ise $\frac{x}{y} = k$
- x ile y, z ile t doğru orantılı ise; $\begin{matrix} x & \times & y \\ z & & t \end{matrix}$ D.O

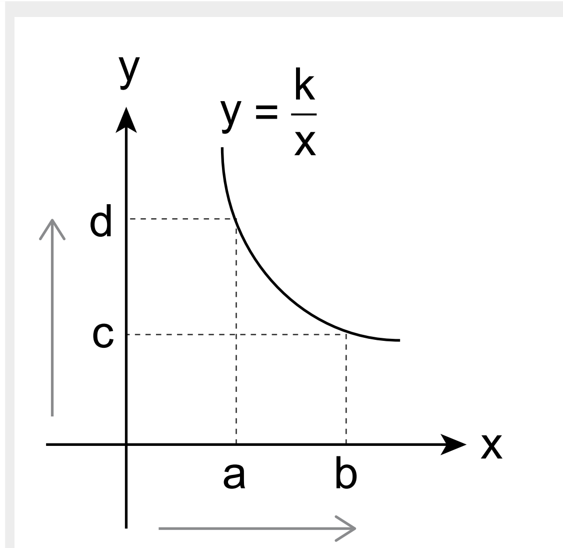
Ters Orantı

- İki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyorsa, ya da biri azalır iken diğeri aynı oranda artıyorsa bu iki çokluk ters orantılıdır denir.
- k pozitif sabit bir sayı x ile y ters orantıl

Doğru orantı grafiği



Ters orantı grafiği



ÖRNEK

x ile y ters orantılıdır. $x = 4$ iken $y = 9$ olduğuna göre $x = 6$ iken y kaçtır?

ÇÖZÜM

x ile y ters orantılı olduklarından

$y = \frac{k}{x} \Rightarrow x \cdot y = k$ (orantı sabiti)

$x \cdot y = k \Rightarrow 4 \cdot 9 = k \Rightarrow k = 36$

$x = 6$ için $x \cdot y = k \Rightarrow 6 \cdot y = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{6} \Rightarrow y = 6$

ORTALAMA ÇEŞİTLERİ

Aritmetik Ortalama

- $A.O = \frac{A_1 + A_2 + ... + A_n}{n}$ verilerin toplamının veri sayısına oranına aritmetik ortalama denir.
- n tane sayının aritmetik ortalaması x ise bu sayıların toplamı = n . x'tir.

Geometrik Ortalama

- $A_1, A_2, A_3 .... A_n$ sayılarının geometrik ortalaması;
- $G.O = \sqrt[n]{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ ... \ A_n}$ olarak hesaplanır.
- $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ orantısındaki pozitif x reel sayısına a ve b sayılarının orta orantılısı denir. İki sayının orta orantısına geometrik ortalaması da denir.

Harmonik Ortalama

- $A_1, A_2, A_3 .... A_n$ olmak üzere n tane sayının harmonik ortalaması;
- $H.O = \frac{n}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} ...... + \frac{1}{A_n}}$'dir.

a ve b sayılarının aritmetik ortalaması geometrik ortalamasına eşit ise a ve b sayıları eşittir.

ÖRNEK

-5, 4, 7, 12 sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

ÇÖZÜM

$$A.O = \frac{(-5)+4+7+12}{4}$$

$$= \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5\text{'tir.}$$

ÖRNEK

a ve b sayılarının aritmetik ortalaması geometrik ortalamasına eşittir.

Buna göre $\frac{3a+2b}{3a-2b}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

a ve b sayılarının aritmetik ortalaması geometrik ortalamasına eşit olduğuna göre a ve b sayıları eşittir.

$$\frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{5a}{a} = 5\text{'tir.}$$

ÖRNEK

İki sayının aritmetik ortalaması $\sqrt{2}$, geometrik ortalaması $\sqrt{10}$'dur.

Bu iki sayının harmonik ortalaması kaçtır?

ÇÖZÜM

a ve b şeklinde iki sayının aritmetik ortalaması 2 ise

$a + b = 4$'tür.

Geometrik ortalaması; $\sqrt{10}$ ise $a \cdot b = 10$ dur.

Harmonik ortalama; $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2\cdot ab}{a+b} = \frac{2\cdot 10}{4} = 5\text{'tir.}$

ÖRNEK

5 tane sayının aritmetik ortalaması 12'dir. Bu sayılara hangi sayı eklenirse yeni ortalama 15 olur?

ÇÖZÜM

$5 \cdot 12 = 60$ sayıların toplamı

$$\frac{60+x}{6} = 15$$

$60 + x = 6 \cdot 15$

$x = 6 \cdot 15 - 60 = 30\text{'dur.}$

SAYI KESİR PROBLEMLERİ

SAYI - KESİR PROBLEMLERİ
x Herhangi Bir Sayı Olmak Üzere;
• Bir sayının 3 fazlası; $x + 3$
• Bir sayının 5 katı; $5x$
• Bir sayının 4 fazlasının 2 katı; $2(x + 4)$
• Bir sayının karesinin çeyreği; $\frac{x^2}{4}$
• Bir sayının 3'te birinin 5 fazlası; $\frac{x}{3} + 5$
• Bir sayının 1 eksiğinin yarısı; $\frac{(x - 1)}{2}$
• Sayı problemleri çözülürken örneklerde verildiği gibi önce sözel ifadeler cebirsel ifadelere dönüştürülerek denklem kurulur ve denklemin çözümü ile sonuca ulaşılır.

ÖRNEK

Bir üçgenin iç açıları $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ ile doğru orantılıdır.

En büyük açı kaç derecedir?

ÇÖZÜM

Üçgenin iç açıları toplamı 180°dir.

$$\frac{A}{\frac{1}{3}} = \frac{B}{\frac{1}{4}} = \frac{C}{\frac{1}{6}} = k$$

$$\frac{A+B+C}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = k \rightarrow \frac{180}{\frac{4+3+2}{12}} = k$$

$$180 \cdot \frac{12}{9} = k \rightarrow 240 = k$$

$$\frac{A}{\frac{1}{3}} = 240 \rightarrow A = 80°\text{dir.}$$

ÖRNEK

Bir sayının 3 katının 2 fazlası aynı sayının 2 katının 7 fazlasına eşit oluyorsa bu sayı kaçtır?

ÇÖZÜM

$$3x + 2 = 2x + 7$$

$$3x - 2x = 7 - 2 \Rightarrow x = 5$$

ÖRNEK

Bir parkta 3 kişilik ve 5 kişilik banklardan toplam 8 tane vardır.

Bankların tamamına toplam 36 kişi oturabildiğine göre bu parkta kaç tane 5 kişilik bank vardır?

ÇÖZÜM

3 kişilik	5 kişilik
(8 – x)	(x)

$$3 \cdot (8 - x) + 5 \cdot x = 36$$

$$24 - 3x + 5x = 36$$

$$2x = 12 \rightarrow x = 6$$

ÖRNEK

20 soruluk bir çoktan seçmeli sınavda, her doğru cevap için 5 puan veriliyor ve her yanlış cevap için 3 puan siliniyor. Soruların tamamını yanıtlayan Asya, bu sınavdan 60 puan aldığına göre kaç soruya yanlış cevap vermiştir?

ÇÖZÜM

Asya x adet soruyu yanlış cevaplamış olsun, öyleyse (20–x) adet soruyu doğru cevaplamıştır.

$$(20 - x) \cdot 5 - 3x = 60$$

$$100 - 5x - 3x = 60$$

$$8x = 40 \rightarrow x = 5$$

YAŞ PROBLEMLERİ

YAŞ PROBLEMLERİ

Bir kişinin bugünkü yaşı x ise;

- a yıl sonraki yaşı $x + a$
- a yıl önceki yaşı $x - a$

n kişinin yaşları toplamı x ise;

- a yıl sonraki yaşları toplamı $x + n \cdot a$
- a yıl önceki yaşları toplamı $x - n \cdot a$

- İki kişinin yaşları farkı x ise a yıl sonra ya da a yıl önce yaşları farkı değişmez yine x'tir.

ÖRNEK

Bir grup öğrencinin yaşları toplamı 144’tür.

Bu öğrencilerin 3 yıl önceki yaş ortalaması 15 olduğuna göre bu grupta kaç öğrenci vardır?

ÇÖZÜM

Gruptaki öğrencilerin 3 yıl önceki yaş ortalaması 15 ise bugünkü yaş ortalaması, $15 + 3 = 18$

Öyleyse bu gruptaki kişi sayısı:

$\frac{144}{18} = 8$'dir.

ÖRNEK

Bir annenin yaşı 3’er yıl arayla dünyaya gelen 3 çocuğunun yaşları toplamından 12 fazladır.

En küçük çocuk en büyük çocuğun yaşına geldiğinde anne 60 yaşında olacağına göre, ortanca çocuk kaç yaşındadır?

ÇÖZÜM

Çocukların yaşları; x, $x + 3$, $x + 6$

Annenin yaşı; $12 + x + x + 3 + x + 6 = 3x + 21$ olur.

6 yıl sonra annenin yaşı 60 olacağından,

$$\begin{aligned} 3x + 21 + 6 &= 60 \\ 3x &= 33 \\ x &= 11 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Ortanca çocuk; $x + 3 = 11 + 3 = 14$ olur.

ÖRNEK

Asya’nın yaşı a, Yusuf’un yaşı y’dir. Asya Yusuf’tan büyüktür.

Buna göre kaç yıl sonra Asya’nın yaşı Yusuf’un yaşının 2 katı olur?

ÇÖZÜM

Asya	Yusuf	
a	y	
$a + t$	$y + t$	t yıl sonra

$$\begin{aligned} a + t &= 2(y + t) \\ a + t &= 2y + 2t \\ a - 2y &= t \\ t &= a - 2y\text{'dir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

Bir babanın yaşı oğlunun yaşının 3 katından 5 fazladır.

İkisinin yaşları toplamı 49 olduğuna göre baba kaç yaşındadır?

ÇÖZÜM

Oğul	Baba
x	$3x + 5$

$$\begin{aligned} x + 3x + 5 &= 49 \\ 4x + 5 &= 49 \\ 4x &= 49 - 5 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

$x = 11$ ise,

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 3 \cdot 11 + 5 \\ &= 33 + 5 \\ &= 38 \end{aligned}$$

YÜZDE, FAİZ, KÂR - ZARAR PROBLEMLERİ

YÜZDE, FAİZ, KÂR - ZARAR PROBLEMLERİ

- Bir x sayısı'nın % a'sı $= x \cdot \frac{a}{100}$
- Bir x sayısı'nın % a'sının %b'si $= x \cdot \frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100}$
- Bir x sayısı'nın %a fazlası $= x + x \cdot \frac{a}{100} = \frac{x(100+a)}{100}$
- %a'sı x olan sayı $= x \cdot \frac{100}{a}$
- Bir x sayısı'nın %a eksiği $= x - x \cdot \frac{a}{100} = \frac{x(100-a)}{100}$
- Maliyet fiyatı = Alış fiyatı + masraflar
- Satış fiyatı = Maliyet fiyatı (+) kâr veya (–)zarar
- A = Ana para F = Faiz n = Faiz yüzdesi t = Süre (zaman)
- Yıllık Faiz $F = \frac{A \cdot n \cdot t}{100}$ Aylık Faiz $F = \frac{A \cdot n \cdot t}{1200}$ Günlük Faiz $F = \frac{A \cdot n \cdot t}{36000}$ Bileşik Faiz $F + A = A \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^t$

ÖRNEK

32 sayısının %25'i kaçtır?

ÇÖZÜM

$32 \cdot \frac{25}{100} = 8$'dir.

ÖRNEK

420 hangi sayının %30'u dur?

ÇÖZÜM

$420 \frac{100}{30} = 1400$

ÖRNEK

x TL para yıllık % 60 faiz ile 1 yıl sonunda y TL olarak çekiliyor. y TL para yıllık % 50 faiz ile 6 ay sonunda z TL olarak çekiliyor. x ile z arasındaki bağıntı nedir?

ÇÖZÜM

$\text{Çekilen para} = \text{Ana para} + \text{Faiz}$

$x + \frac{x \cdot 60}{100} = y \Rightarrow y = \frac{160x}{100} = \frac{8}{5}x \Rightarrow y = \frac{8}{5}x$

$y + y \cdot \frac{50 \cdot \frac{6}{12}}{100} = Z$

$y + \frac{25}{100}y = Z$

$\frac{5}{4}y = Z$

$\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5}x = Z \Rightarrow 2x = Z$

ÖRNEK

Bir mal alış fiyatı üzerinden % 20 kâr elde edilerek 600 TL'ye satılıyor.

Bu malın alış fiyatı kaç TL'dir?

ÇÖZÜM

Bu malın alış fiyatı 100 x olsun.

% 20 kâr ile 120 x fiyata satılır.

$120 \cdot x = 600$ ise

$x = \frac{600}{120}$

$x = 5$ olur.

Alış fiyatı,

$100 \cdot x = 100 \cdot 5$

$= 500$ TL

KARIŞIM PROBLEMLERİ

KARIŞIM PROBLEMLERİ

- Saf madde oranı $= \dfrac{\text{saf madde miktarı}}{\text{karışım miktarı}}$

- Saf madde yüzdesi $= \dfrac{\text{saf madde miktarı}}{\text{karışım miktarı}} \cdot 100$

- Şeker oranı %a olan x gram şekerli su ile şeker oranı %b olan y gram şekerli su karıştırılınca karışımın şeker yüzdesi c oluyorsa;

$$x.\frac{a}{100} + y \cdot \frac{b}{100} = (x + y)\frac{c}{100}$$

ÖRNEK

Ağırlıkça % 40'ı şeker olan x gram şekerli su ile ağırlıkça % 20'si şeker olan y gram şekerli su karıştırılıyor.

Oluşan karışımın % 30'u şeker olduğuna göre x ve y arasındaki bağıntı ne olur?

ÇÖZÜM

$$x\cdot\frac{40}{100}+y\cdot\frac{20}{100}=(x+y)\frac{30}{100}$$

$$\frac{40x+20y}{100}=\frac{30x+30y}{100}$$
$$40x+20y=30x+30y$$
$$10x=10y$$

Eşitliğin her iki tarafı 10'a bölünürse;

x = y olur.

ÖRNEK

250 gr %30'luk şekerli suya 25 gr şeker 125 gr su eklenir ise yeni elde edilen şekerli su karışımındaki şeker oranı % kaç olur?

ÇÖZÜM

$250\cdot\frac{300}{100}=75$ karışımda ilk başta 75 gr şeker vardır. 25 gr eklenir ise son şeker miktarı $25+75=100$ gr olur.

Son karışım miktarı;

$250+25+125=400\,gr$

400 100

100 x

$$x=\frac{100\cdot 100}{400}$$

$x=25$ olur.

ÖRNEK

100 gr un, 30 gr şeker, 20 gr yağ karıştırılarak helva yapılıyor.

Bu helvadaki yağ oranı % kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\frac{20}{100+30+20}=\frac{20}{150}$$
$$\frac{20}{150}=\frac{x}{100}$$
$$x=\frac{20\cdot 100}{150}=\frac{40}{3}$$

ÖRNEK

% 40'ı tuz olan 200 gr tuzlu su karışımından kaç gr su buharlaştırılmalıdır ki yeni karışımın su oranı %36 olsun?

ÇÖZÜM

Son karışımdaki su oranı % 36 ise tuz oranı,

$100-36=64$ %64 olmalı.

$40\cdot 200=64\cdot x$ ise $x=125$

Son karışım 125 gr olursa,

$200-125=75$ gr su buharlaştırılmalıdır.

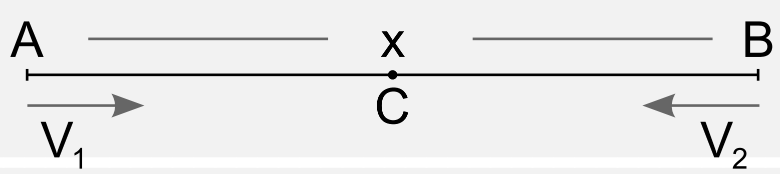
HAREKET PROBLEMLERİ

KARIŞIM PROBLEMLERİ

- Sabit hızla hareket eden hareketlilerin aldıkları yol hız ile zamanın çarpımıdır.

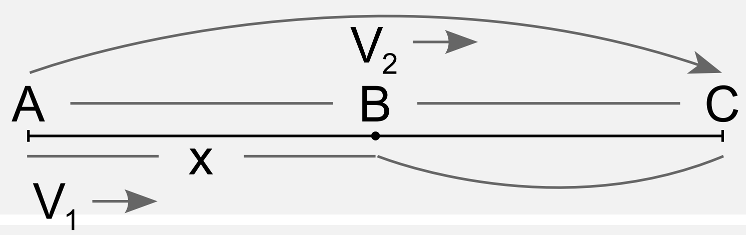
$x = \text{yol}$ $\quad V = \text{Hız}$ $\quad t = \text{zaman}$ $\quad x = V \cdot t$

- A ve B noktalarından birbirine doğru hareket eden iki hareketli t süre sonra C noktasında karşılaşır.



$t = \dfrac{x}{V_1 + V_2}$ olur.

- A ve B noktalarından aynı yönde hareket eden iki araç t süre sonra C'de karşılaşırlar.



$t = \dfrac{x}{V_1 - V_2}$

- Ortalama Hız $= \dfrac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}$

- A'dan B'ye V_1 ile gidip V_2 ile dönen aracın ortalama hızı $= \dfrac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$

ÖRNEK

Bir araç, aralarında 180 km olan iki şehir arasını 3 saatte alıyor. Buna göre bu aracın hızı kaç km/sa'dir?

ÇÖZÜM

$$\text{Hız} = \frac{\text{Yol}}{\text{Zaman}} = \frac{180}{3} = 60 \text{ km/sa}$$

ÖRNEK

320 km'lik yolu, hızı 80 km/sa olan bir araç kaç saatte alır?

ÇÖZÜM

$$\text{Zaman} = \frac{\text{Yıl}}{\text{Hız}} = \frac{320}{80} = 4 \text{ saat}$$

ÖRNEK

Bir araç 480 km'lik yolu 8 saatte alıyor.

Bu araç hızını 2 kat arttırırsa aynı yolu kaç saatte alır?

ÇÖZÜM

Aracın hızına V denilirse;

$$V = \frac{480}{8} = 60 \text{ km/sa}$$

Araç hızını iki kat arttırırsa,

$V + 2V = 3V$

$3 \cdot 60 = 180$ km/sa olur.

Öyleyse; $480 = 180 \cdot t$

$$t = \frac{480}{180} = \frac{8}{3} \text{ saat}$$

ÖRNEK

Bir araç belli bir yolu 120 km/sa hızla gidip 40 km/sa hızla geri dönüyor. Buna göre aracın gidiş dönüşteki ortalama hızı kaç km/sa'dir?

ÇÖZÜM

Yol = x km olsun. Araç x yolunu giderken t_1, dönerken t_2 sürede alırsa,

$$x = 120 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x}{120} \qquad x = 40 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{x}{40}$$

$$\text{Ortalama hız} = \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam süre}} = \frac{x+x}{\frac{x}{120}+\frac{x}{40}} = \frac{2x}{\frac{4x}{120}}$$

$$= \frac{2x}{1} \cdot \frac{120}{4x}$$

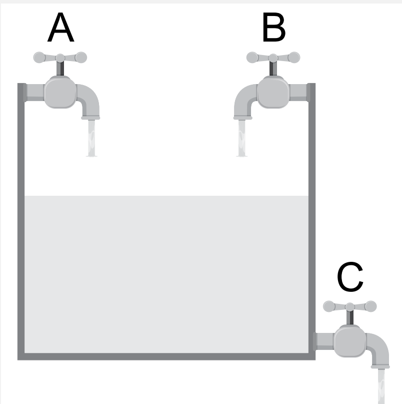
$$= 60 \text{ km / sa}$$

İŞÇİ - HAVUZ PROBLEMLERİ

İŞÇİ PROBLEMLERİ

- A işin tamamını x saatte yaparsa, 1 saatte $\frac{1}{x}$'ini yapar.
- B işin tamamını y saatte yaparsa, 1 saatte $\frac{1}{y}$'sini yapar.
- İkisi birlikte 1 saatte, işin $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$'sini yapar.
- İkisi birlikte işin tamamını t saatte yaparlarsa, $\frac{t}{x}+\frac{t}{y}=1$ veya $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot t=1$ olur.

HAVUZ PROBLEMLERİ



- A musluğu tek başına x saatte
- B musluğu tek başına y saatte doldursun
- C musluğu tek başına z saatte boşaltsın
- Tamamen dolma süresi t olsun

- Üç musluk birlikte açılırsa $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{t}$ olur.

- A ve B muslukları birlikte açılırsa $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{t}$ olur.

ÖRNEK

Bir havuzu bir musluk 4 saatte doldururken diğer bir musluk 8 saatte boşaltıyor. İki musluk birlikte açılırsa bu havuz kaç saatte dolar?

ÇÖZÜM

Bu soruda verilen musluklardan havuzu dolduran musluk (+) boşaltan musluk (–) alınır ise;

$$\underset{(2)}{\frac{1}{4}}-\underset{(1)}{\frac{1}{8}}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{t}$$

$t=8$ saatte dolar.

ÖRNEK

Yusuf bir işi x günde, Adem aynı işi y günde bitiriyor.

Yusuf ile Adem bu işi birlikte 5 günde bitirdiklerine göre, x'in y türünden ifadesi ne olur?

ÇÖZÜM

$$\frac{5}{x}+\frac{5}{y}=1 \Rightarrow \frac{5y+5x}{xy}=1$$

$$5x+5y=xy$$

$$5y=xy-5x$$

$$5y=x(y-5)$$

$$x=\frac{5y}{y-5}$$

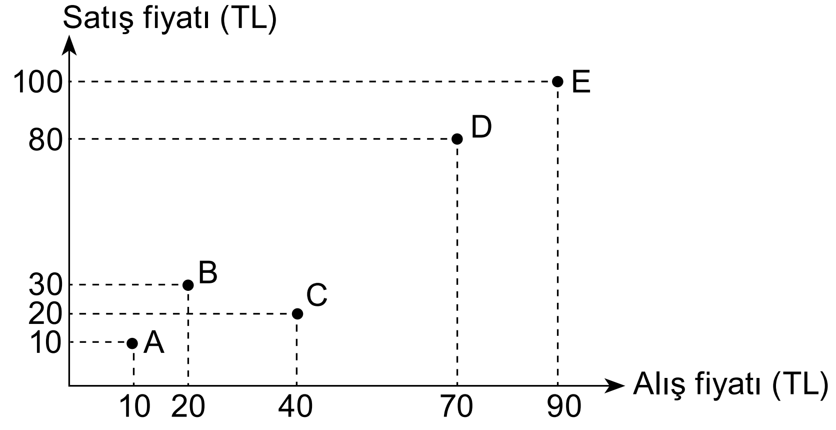
GRAFİK VE TABLO YORUMLAMA

GRAFİK VE TABLO
En çok kullanılan grafik türleri, çizgi, sütun ve daire grafikleridir.
Çizgi grafikleri, genellikle içinde değişim ifadeleri olan problemlerde kullanılır. Hız–zaman, alış–satış... v.b.
Sütun grafikleri, farklı grup karşılaştırması olan problemlerde kullanılır. Sınıflar ve içindeki öğrenci sayı karşılaştırmaları, şirketler kâr–zarar durumları... v.b.
Daire grafikleri, bir bütünü oluşturan parçaların yorumlanmasında kullanılır. Toplam maaşın ne şekilde nereye kullanıldığı, ekili bir tarlanın parsellerdeki farklı bölgeleri... v.b. Daire grafiğinde tamamın 360° olduğunu hep hatırlayalım. Orantı kurarken çokça faydalanacağız.

NOT: Çizgi grafiklerinde eğim karşılaştırması, sütun grafiklerinde sütun karşılaştırması yapılır.

ÖRNEK

Aşağıdaki grafik bir mağazanın alıp sattığı ürünlerin alış–satış fiyatlarını göstermektedir.



Bu mağaza sahibinin alıp sattığı ürün sayıları da aşağıdaki gibidir.

Ürünler	A	B	C	D	E
Alınan	30	40	50	60	20
Satılan	10	8	12	20	10

Buna göre mağaza sahibinin satılan ürünlerden elde ettiği kâr–zarar durumu ne olur?

ÇÖZÜM

A ürünü için satış–alış= 10–10= 0 TL

B ürünü için satış–alış= 30–20 = 10 TL

C ürünü için satış–alış= 20–40 = –20 TL

D ürünü için satış–alış= 80–70 = 10 TL

E ürünü için satış–alış= 100–90 = 10 TL

Toplam= 10.0 + 8.10 + 12(–20) + 20.10 + 10.10

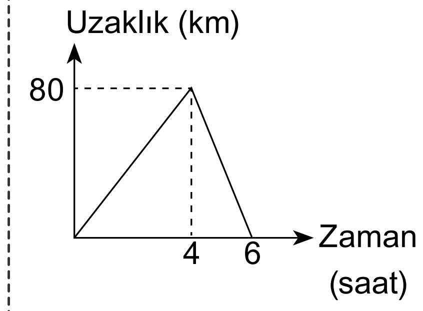
= 0 + 80 + (–240) + 200 + 100

= 140 TL kâr elde eder.

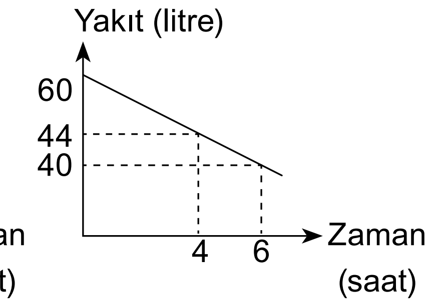
ÖRNEK

Bir aracın yokuşlu bir yolu çıkarken ve inerken başladığı noktaya olan uzaklığı ve harcadığı yakıt miktarı aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir.

Aracın deposu dolu iken çıkar ve hiç durmadan tekrar aynı yoldan döner. Aracın A noktasına olan uzaklığı Grafik–1'de, çıkarken ve inerken harcadığı yakıt Grafik–2'de gösterilmiştir.



Grafik – 1



Grafik – 2

Buna göre otomobilin yokuştan inerken 1 litre yakıtla gittiği yol, çıkarken 1 litre yakıtla gittiği yoldan kaç km fazladır?

ÇÖZÜM

Çıkarken 1 litre ile gidilebilecek yolu bulalım. Grafik–1'de

80 km 4 sa giderse
x 1 sa gider

$x=\frac{80}{4}=20$ km ①

Grafik–2'de 60–44= 16 litre benzin harcanmış. Yani

4 sa 16 litre benzin harcarsa
1 sa x litre benzin harcar.

$x=\frac{16}{4}=4$ litre ②

① ve ②'den
20 km — 4 litre
x km — 1 litre

$$x=\frac{20}{4}=5 \text{ km}$$

İnerken litre ile gidilebilecek yolu bulalım. Grafik–2'den 44–40= 4 litre harcanmıştır.

Yani; Grafik–2'den 44–40= 4 litre

80 km — 2 sa
x — 1 sa

$$x=\frac{80}{2}=40 \text{ km} \quad ③$$

2 sa — 4 litre
1 sa — x

$$x=\frac{4}{2}=2 \text{ litre} \quad ④$$

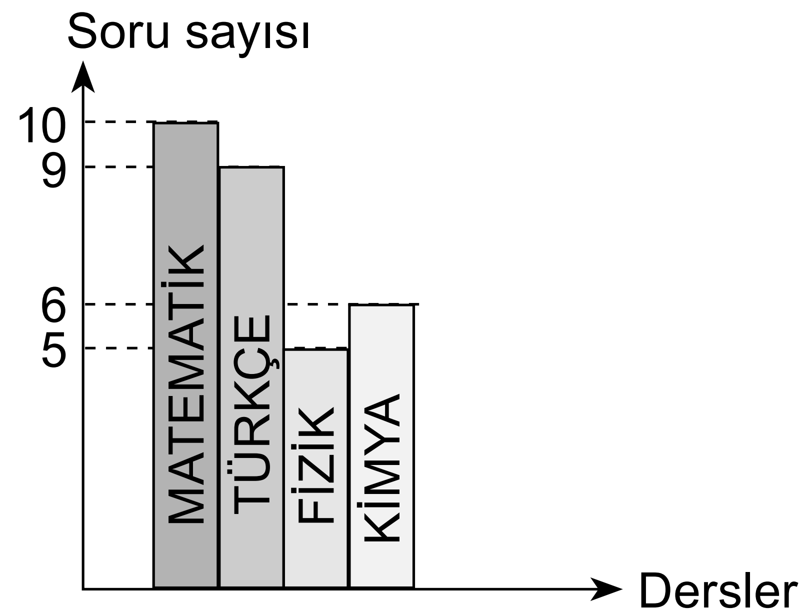
③ ve ④'ten
40 km — 2 litre
x km — 1 litre

$$x=\frac{40}{2}=20 \text{ km}$$

Aradaki fark= 20–5= 15 km bulunur.

ÖRNEK

Ayşenur'un 1 saatte çözdüğü soru sayıları ve ders isimleri aşağıdaki sütun grafiğinde gösterilmiştir.



Ayşenur Fizik dersinde çözdüğü soru sayısını belli bir sayıda arttırmıştır. Son durumda çözülen sorulara göre daire grafiği oluşturulduğunda fizik ve matematikte çözülen soru sayısının gösterildiği merkez açının arasındaki fark 80°dir. Buna göre Ayşenur'un son durumda fizikten çözdüğü soru sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM

Ayşenur'un son anda fizikten çözdüğü soru sayısı x olsun. Bu durumda toplam soru sayısı= 10+9+(x+5)+6=30+x'dir.

Fizikten çözülen soru sayısını gösteren daire diliminin merkez açısı=

$$\frac{5+x}{30+x}\cdot 360$$

Matematikten çözülen soru sayısını gösteren daire diliminin merkez açısı= $\frac{10}{30+x}\cdot 360$

Aralarındaki fark 80° olduğundan;

$$\frac{5+x}{30+x}.360-\frac{10}{30+x}.360=80$$

$$\cancel{360}^{9}(5+x-10)=\cancel{80}^{2}(30+x)$$

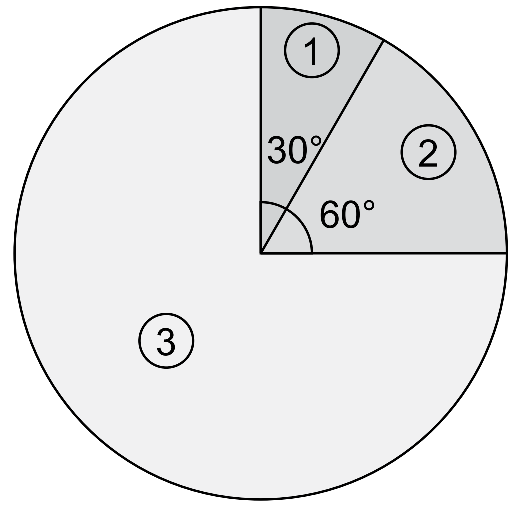
$$9(x-5)=2(30+x)$$

$$9x-45=60+2x$$

$$7x=105$$

$x=15$ bulunur.

ÖRNEK



Yukarıda gösterilen daire grafiğinde bir okulda bulunan 1. sınıf, 2. sınıf ve 3. sınıf öğrenci dağılımı gösterilmektedir. 1. sınıf öğrenci sayısı 3x+1, 2. sınıf öğrenci sayısı 2x+10 olduğuna göre 3. sınıf öğrenci sayısı kaçtır?

ÇÖZÜM

Daire grafiğinde 1. sınıfı gösteren merkez açı 30°, 2. sınıfı gösteren merkez açı 60° olduğundan

$$\frac{30}{60}=\frac{3x+1}{2x+10}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{3x+1}{2x+10}$$

$$6x+2=2x+10$$

$$4x=8$$

$$x=2$$

1. sınıf= 3x+1= 7 kişi 3. sınıf gösteren merkez açı:

360−(30+60)= 270 olup;

30°	7 kişi
270	x

$$30x=270\cdot 7$$

$$x=\frac{270\cdot 7}{30}=63 \text{ bulunur}$$

KÜMELER

Küme: İyi tanımlanmış nesneler topluluğuna küme denir. Kümeyi oluşturan nesnelerin her birine kümenin elemanı denir. Bir kümenin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.

KÜMELERİN GÖSTERİMİ

Liste Yöntemi

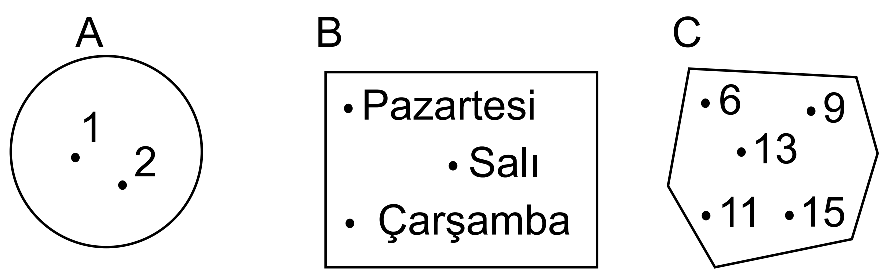
• Kümenin elemanları { } sembolü içerisine her bir elemanın arasına virgül (,) konularak gösterilmelidir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, a, b, c\}$ $s(A) = 6$

Venn Şeması Yöntemi

• Kümenin elemanlarının kapalı bir şekil içerisinde, önlerine nokta konularak gösterilmesidir.

Örnek:



Ortak Özellik Yöntemi

• Kümenin bütün elemanlarının ortak özelliği belirtilerek ifade edilmesidir.

Örnek: A: {Haftanın “p” harfi ile başlayan günleri}

B: {Yaz mevsiminin ayları}

C: $\{x \mid x < 10 \text{ ve } x \in Z^+\}$

KÜME ÇEŞİTLERİ

Boş Küme

Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir. { } veya $\varnothing$ sembolü ile gösterilir.

Denk Küme

Eleman sayıları eşit olan kümelere denk küme denir. “$\equiv$” sembolü ile gösterilir.

Eşit Küme

Aynı elemanlardan oluşan kümeye eşit küme denir. "=” sembolü ile gösterilir.

Alt Küme

Herhangi bir A kümesinin tüm elemanları aynı zamanda B kümesininde elemanı ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir. $A \subset B$ ya da $B \supset A$ şeklinde gösterilir.

- n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı 2^ndir.
- n elemanlı kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı;

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$'dir.

Özalt Küme

Herhangi bir kümenin kendisinden başka tüm alt kümelerine öz alt küme denir. 2^n-1 öz alt küme sayısıdır.

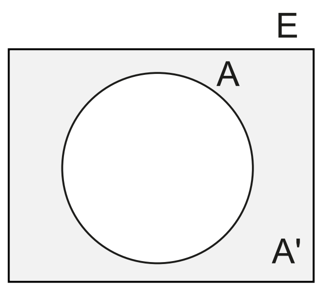
Evrensel Küme

Bütün kümeleri kapsayan en geniş kümeye evrensel küme denir. E harfi ile gösterilir.

KÜMELERDE İŞLEMLER

Bir Kümenin Tümleyeni

Evrensel kümede olup A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir. A' ya da $\overline{A}$ ile gösterilir.



$s(A)+s(A')=s(E)$

$(A')'=A$

$E'=\varnothing \qquad \varnothing'=E$

Kümelerin Birleşimi

A ve B kümesindeki elemanların tamamına A ile B nin birleşimi denir. $A \cup B$ şeklinde gösterilir.

$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$

Kümelerin Kesişimi

A ve B kümesinin her ikisinde ortak olarak bulunan elemanların oluşturduğu kümeye A kesişim B kümesi denir. $A \cap B$ ile gösterilir.

$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$

Kümelerin Farkı

A kümesinde olduğu halde B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A nın B den farkı denir. $A-B$ ya da $A \setminus B$ şeklinde gösterilir.

$A-B=\{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$

- $s(A \cup B)=s(A)+s(B)-s(A \cap B)$

FONKSİYONLAR

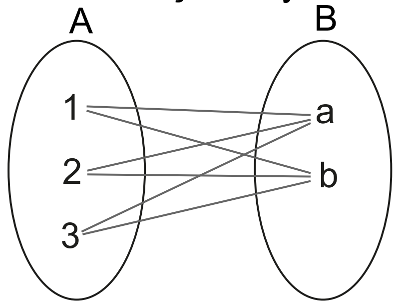
FONSİYONLAR

Sıralı İkili

a, b $\in$ R olmak üzere (a, b) olarak gösterilen ifadeye sıralı ikili denir. Koordinat sisteminde (a, b) sıralı ikilisinde birinci bileşen x, ikinci bileşen y ekseninden alınmak üzere koordinat düzleminin tamamı sıralı ikililerden oluşur.

Kartezyen Çarpım

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere; A'daki her bir elamanı B'deki her bir elamana eşleyen sıralı ikililerin oluşturduğu kümeye kartezyen çarpım kümesi denir. A x B ile gösterilir.



$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

Bağıntı

A x B kümesinin her bir alt kümesine A'dan B'ye tanımlı bir bağıntı denir. β sembolü ile gösterilir. Sıralı ikililerin yer değiştirmesi ile oluşan bağıntı ters bağıntıdır. Ters bağıntı β^{-1} sembolü ile gösterilir.

$(x,y) \in \beta,\ (y,x) \in \beta^{-1}$

Fonksiyon

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A'daki her bir elemanı B'deki bir elemana eşleyen bağıntıya A'dan B'ye fonksiyon denir. (A kümesinde eşlenmeyen eleman kalmamalıdır.) A'dan B'ye bir fonksiyonda A'ya tanım B'ye görüntü (değer) kümesi denir.

Örnek: f: R $\to$ R

f(x) = 2x + 3 olduğuna göre f(1) + f(7) toplamı kaçtır?

Çözüm: $f(x) = 2x + 3$ ise

$f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$

$f(7) = 2 \cdot 7 + 3 = 14 + 3 = 17$

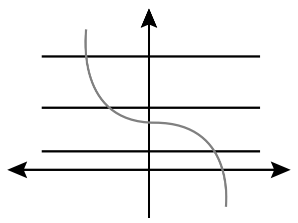
$f(1) + f(7) = 5 + 17 = 22$

FONSİYON TÜRLERİ

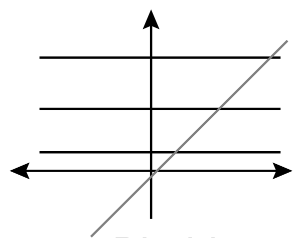
Birebir Fonksiyon

Bir fonksiyonda tanım kümesindeki her elemanın görüntü kümesinde farklı bir görüntüsü var ise bu fonksiyona birebir fonksiyon denir. a ve b tanım kümesinin elemanları olmak üzere $f(a) \neq f(b)$ olmalıdır.

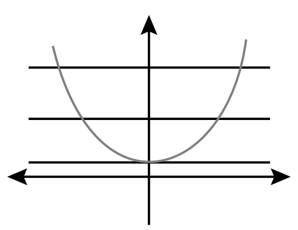
Grafiği verilen bir fonksiyon yatay doğrular ile kesildiğinde sadece bir noktada kesiliyorsa fonksiyon birebirdir, birden fazla noktada kesiliyorsa fonksiyon birebir değildir.



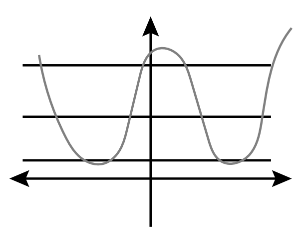
Birebir



Birebir

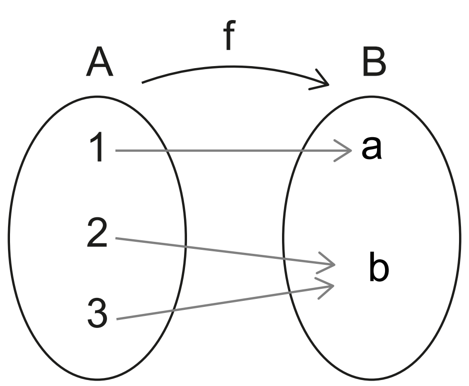


Birebir değil



Birebir değil

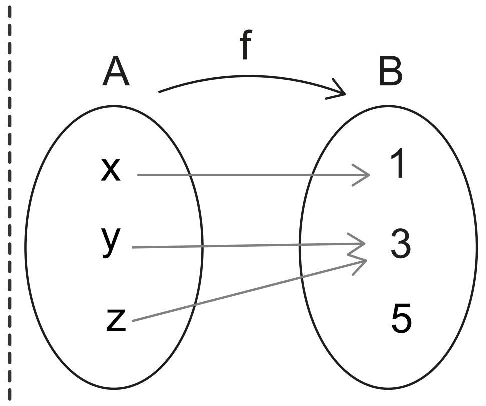
Örten Fonksiyon



Örten Fonksiyon

A’dan B’ye bir f fonksiyonunda görüntü kümesinde boşta eleman kalmıyorsa fonksiyon örtendir.

İçine Fonksiyon



İçine Fonksiyon

A’dan B’ye bir f fonksiyonunda görüntü kümesinde boşta kalan eleman varsa fonksiyon içinedir.

Birim Fonksiyon

Tanım kümesindeki her elemanı kendisine götüren fonksiyona birim fonksiyon denir. $f(x) = x$ (Birim fonksiyon I ile gösterilir.)

Sabit Fonksiyon

Tanım kümesinin tüm elemanlarını görüntü kümesindeki sadece bir elemana eşleyen fonksiyona sabit fonksiyon denir. $f(x) = C$

Doğrusal Fonksiyon

$a, b \in R$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyona doğrusal fonksiyon denir.

Bileşke Fonksiyon

A, B, C boş olmayan kümeler olmak üzere; f: A → B g: B → C birer fonksiyon olmak üzere; gof: A → C fonksiyonuna bileşke fonksiyon denir. gof(x) = g(f(x))'tir.

I birim fonksiyon olmak üzere; foI = Iof = f

fo(goh)(x) = (foh)oh(x)

Ters Fonksiyon

f: A → B birebir örten bir fonksiyon olmak üzere; f^{-1}: B → A fonksiyonuna F fonksiyonunun tersi denir. f^{-1} ile gösterilir.

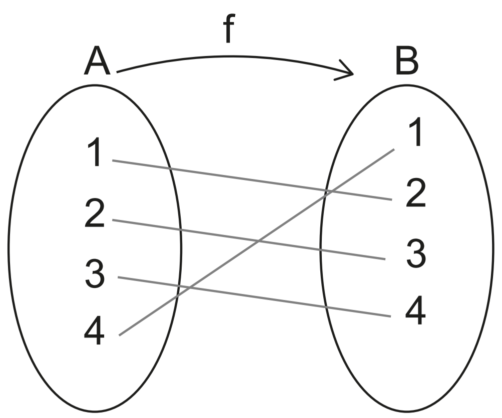
$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

$$f(x)=ax+b \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

Permütasyon Fonksiyon

f: A → A birebir örten fonksiyonlara permütasyon fonksiyon denir.



$f:(1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 1)$

f fonksiyonu bir permütasyon fonksiyonudur.

FONKSİYONLARDA DÖRT İŞLEM

Tanım kümelerinin kesişimi boş olmayan fonksiyonlarda dört işlem yapılabilir.

$f : A \to R \quad g : B \to R \quad f, g : A \cap B \to R$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f:g)(x) = f(x) : g(x) \qquad g(x) \neq 0$$

ÖRNEK

$f(x) = (a-2) \cdot x^2 + (a-b+1) \cdot x + a \cdot b$ fonksiyonu f: $R \to R$ tanımlı sabit bir fonksiyon olduğuna göre f(100) kaçtır?

ÇÖZÜM

Sabit fonksiyonda x, x^2, x^3 ... ifadelerinin katsayıları 0'dır.

O halde $f(x) = \underbrace{(a-2)}_{0} \cdot x^2 + \underbrace{(a-b+1)}_{0} \cdot x + a \cdot b$ fonksiyonu için;

$a-2=0 \Rightarrow a=2$

$a-b+1=0 \Rightarrow 2-b+1=3-b=0 \Rightarrow b=3$

$f(x)=\underbrace{\cancel{(a-2)}}_{0}\cdot x^2+\underbrace{\cancel{(a-b+1)}}_{0}\cdot x+a\cdot b=a\cdot b=2\cdot 3$

$\Rightarrow f(x)=2\cdot 3 \Rightarrow f(x)=6$

O halde;

$f(1) = f(2) = f(3) = ... = f(100) ... = 6$'dır.

ÖRNEK

$f(x)=\sqrt[16]{x+5}$

reel değerli fonksiyonunun reel sayılar üzerindeki en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Kök derecesi çift sayı olan reel fonksiyonlarda kök içi negatif olamaz. O halde

$f(x)=\sqrt[16]{x+5}$ ise $x+5 \geq 0$ olup $x \geq -5$ olur.

Ç.K $= [-5, \infty)$ olur.

İŞLEM - MODÜLER ARİTMETİK

İŞLEM

- A boş olmayan bir küme olmak üzere A kümesinden A kümesine tanımlanan her fonksiyona A da tanımlı işlem denir. $\square$ $\triangle$ $*$ $\oplus$ $\odot$ gibi sembollerle gösterilir.

Örnek: $a*b=2a+3b+5$ olmak üzere $1*7$ işleminin sonucu kaçtır?

$a*b=2a+3b+5$
$1*7=2\cdot(1)+3\cdot(7)+5$
$\quad=2+21+5=28$

İşlemin Özellikleri

$x, y, z \in A$ olmak üzere;

Birleşme Özelliği

$x\odot(y\odot z)=(x\odot y)\odot z$ oluyorsa birleşme özelliği vardır denir.

Değişme Özelliği

$x\odot y=y\odot x$ oluyorsa değişme özelliği vardır denir.

Dağılma Özelliği

$x*(y\otimes z)=(x*y)\otimes(x*z)$ oluyorsa $*$ işleminin $\otimes$ işlemi üzerine dağılma özelliği denir.

Birim (etkisiz) Eleman

$x\oplus e=e\oplus x=x$ olacak şekilde bir $e \in A$ varsa $\oplus$ işlemin etkisiz elemanı e'dir.

Ters Eleman

$x\oplus x^{-1}=x^{-1}\oplus x=e$ olacak şekilde $x^{-1}\in A$ varsa $\oplus$ işlemine göre x^{-1}, x'in tersidir denir.

Yutan Eleman

Her $x\in A$ için $x\odot y=y\odot x=y$ ise y $\odot$ işlemine göre yutan elemandır denir.

TABLOLU İŞLEMLER

- A = {a, b, c, d, e}kümesi üzerinde tanımlanan ⊙ işlemi tablosu aşağıda verilmiştir.
- Satır ve sütundaki elemanların kesiştiği noktadaki eleman satır ve sütundaki elemanların işlem sonucudur.

Örneğin; b ⊙ c = a'dır. d ⊙ b = b'dir. d ⊙ c = c'dir.

⊙	a	b	c	d	e → Satır
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

↓
Sütun

- d satır ve sütunu başlangıç satır ve sütunu ile aynı dizilimi gösterdiğine göre d birim (etkisiz) elemandır.
- Tablodaki tüm elemanlar A kümesinin elemanları olduğunda ⊙ işlemi kapalıdır.
- Bir işlemin sonucu etkisiz (birim) eleman ise işlemi yapılan elemanlar birbirinin tersidir. a ⊙ b = d olduğundan a^{-1} = b, b^{-1} = a’dır.
- Tabloda başlangıç köşesinden başlayan köşegene göre elemanlar simetrik dizildiğinden değişme özelliği vardır.
- Tabloda verilen ⊙ işleminin birleşme özelliği vardır.
- Tabloda verilen ⊙ işleminin yutan elemanı yoktur.

ÖRNEK

R' de $a \Delta b = 3a + 3b - ab - 6$ işlemi tanımlanıyor.

$2^{-1} + 5^{-1}$ işleminin sonucu kaçtır? (2^{-1} ikinin tersi, 5^{-1} beşin tersi)

ÇÖZÜM

Etkisiz eleman: $3\cdot 0 + 3\cdot e - 0\cdot e - 6 = 0$

$3e - 6 = \Rightarrow e = 2$

$2 \Delta 2^{-1} = 3\cdot 2 + 3\cdot 2^{-1} - 2\cdot 2^{-1} - 6 \rightarrow 2 = 6 + 2^{-1} - 6 \Rightarrow 2^{-1} = 2$

$5 \Delta 5^{-1} = 3\cdot 5 + 3\cdot 5^{-1} - 5\cdot 5^{-1} - 6$

$2 = 15 - 2\cdot 5^{-1} - 6 \Rightarrow 2\cdot 5^{-1} = 9 - 2$

$5^{-1} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2}$

MODÜLER ARİTMETİK

a ve b tam sayıları verilen bir m tam sayısına bölündüklerinde aynı kalanı veriyorlarsa "a tam sayısı b tam sayısına m modülüne göre denktir" denir.

$a \equiv b \pmod m$ şeklinde gösterilir. $a \equiv b \pmod m$ ifadesi aynı zamanda $a - b$ m ile bölünür ya da m, $a - b$'yi böler şeklinde ifade edilir.

$$\begin{array}{r|l} a & m \\ \cline{2-2} - & t \\ \cline{1-1} b & \end{array} \qquad \begin{array}{l} a = b + m\cdot t \\ a \equiv b(\operatorname{mod} m) \end{array}$$

Modüler Aritmetiğin Özellikleri

- Her a, b, c, d, $x \in Z$ ve m, $n \in Z^+$, $m > 1$ için;
- $a \equiv b(\text{mod } m)$ $c \equiv d(\text{mod } m)$ ise,
- $a \pm c \equiv b \pm d(\text{mod } m)$ $a \cdot c = b \cdot d(\text{mod } m)$
- $a \pm x \equiv b \pm x(\text{mod } m)$ $a \cdot x = b \cdot x(\text{mod } m)$
- $a^n \equiv b^n(\text{mod } m)$

DENKLİK SINIFI

- m ile bölündüğünde x kalanını veren tam sayılar kümesi $\overline{x}$ ile gösterilir ve x'in m moduna göre denklik sınıf şeklinde okunur.
- Örneğin 4 moduna göre denklik sınıfları bulunurken $\frac{Z}{4}$'te elde edilebilecek kalanlar (Bir sayının 4'e bölünmesi ile elde edilebilecek kalanlar) 0, 1, 2, 3'tür.
- "$\overline{0}$" 4'e tam bölünebilen sayılar;
- $\{... -8, -4, 0, 4, 8, 12 ...\}$
- "$\overline{1}$" 4'e bölündüğünde 1 kalanı verenler;
- $\{... -7, -3, 1, 5, 9 ...\}$
- "$\overline{2}$" 4'e bölündüğünde 2 kalanı verenler;
- $\{... -6, -2, 2, 6, 10 ...\}$
- "$\overline{3}$" 4'e bölündüğünde 3 kalanını verenler;
- $\{... -9, -5, -1, 3, 7, 11...\}$
- Z / m'de bir x tam sayısı $x + m \cdot k$ $(k \in Z)$ biçiminde yazılabilir.
- Z / 4'te $3 = 3 + 4 = 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 3 \cdot 4$ ....

ÖRNEK

23^{2011} sayısının birler basamağındaki rakam nedir?

ÇÖZÜM

23 sayısının ve kuvvetlerinin 10 ile bölümünden kalan, 3 sayısının ve kuvvetlerinin 10 ile bölümünden kalana eşittir.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 10 \\ \hline - & 2 \\ 3 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 23 &\equiv 3^1 \equiv 3 \pmod{10} \\ 23^2 &\equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{10} \\ 23^3 &\equiv 3^3 \equiv 7 \pmod{10} \\ 23^4 &\equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10} \\ &\vdots \\ \left(23^4\right)^{502} \cdot 23^3 &\equiv \left(3^4\right)^{502} \cdot 3^3 \equiv 1 \cdot 7 \pmod{10} \end{aligned}$$

$\equiv 7 \pmod{10}$ birler basamağındaki rakam 7'dir.

ÖRNEK

Bir asker 4 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini cumartesi günü tuttuğuna göre, 25. nöbetini hangi gün tutar?

ÇÖZÜM

Bu tür sorularda dikkat etmemiz gereken nokta ilk nöbetin tutulmuş olmasından dolayı $25 \cdot 4 = 100$ gün geçti diye bir ifade kullanmamız hata yapmamıza neden olur. İlk nöbet tutulmuş olduğundan geriye 24 nöbet kalmıştır.

O halde $24 \cdot 4 = 96$ gün geçmiştir.

Bir hafta 7 gün olduğundan mod 7'ye göre işlem yapmalıyız.

Cumartesiden 5 gün sonra perşembeye denk gelir.

$$\begin{array}{r|l} 96 & 7 \\ \hline - & 13 \\ 5 & \end{array}$$

ÖRNEK

$n \in N^+$, $16^{5n+3} \equiv x \pmod{11}$ ise x kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} 16 & 11 \\ \hline - & 1 \\ 5 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 16 &\equiv 5^1 \equiv 5 \pmod{11} \\ 16^2 &\equiv 5^2 \equiv 3 \pmod{11} \\ 16^3 &\equiv 5^3 \equiv 4 \pmod{11} \\ 16^4 &\equiv 5^4 \equiv 9 \pmod{11} \\ 16^5 &\equiv 5^5 \equiv 1 \pmod{11} \\ &\vdots \\ 16^{5n} \cdot 16^3 &\equiv 5^{5n} \cdot 5^3 \equiv 4 \pmod{11} \\ 16^{5n} \cdot 16^3 &\equiv 1^{5n} \cdot 5^3 \equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

PERMÜTASYON - KOMBİNASYON - OLASILIK

Toplama Yoluyla Sayma

- İki olaydan biri a farklı yoldan diğeri b farklı yoldan yapılıyorsa bu olaylardan biri veya diğeri $a + b$ farklı yoldan yapılabilir. Toplam kuralında veya bağlacı kullanılır.

Örnek: Yusuf Bey 3 gömlek 5 tişörtten 1 gömlek veya 1 tişörtü kaç farklı şekilde giyebilir?

Veya bağlacıyla bağlanan ayrık iki kümenin elemanlarından biri kaç farklı şekilde sorulduğu için toplama yoluyla bulunur. $3 + 5 = 8$ farklı şekilde giyinir.

Çarpma Yoluyla Sayma

- Boş olmayan iki veya daha fazla kümenin elemanlarının oluşturabileceği tüm eşleşmeler çarpma yoluyla bulunur.

Örnek: Adem Bey 3 gömlek 5 kravattan 1 gömlek ve 1 kravatı kaç farklı şekilde giyebilir?

Olabilecek tüm eşleşmelerin sayısı çarpma yoluyla bulunur. $5 \times 3 = 15$ farklı şekilde giyebilir.

Permütasyon

n tane eleman içerisinden r tanesinin seçilerek farklı sıralanmasının sayısına; **n'nin r'li permütasyonu** denir.

$r \leq n$ olmak üzere; $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Örnek: $P(5,3) = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{120}{2} = 60$

Dairesel (Dönel) Permütasyon

n tane elemanın bir çember üzerindeki her bir farklı dizilişine **dairesel permütasyon** denir. Dairesel permütasyon sayısı bulunurken n tane noktadan birtanesi başlangıç noktası olarak seçilir. Dolayısıyla n tane elemanın dairesel permütasyonu $(n-1)!$ formülü ile bulunur.

Tekrarlı Permütasyon

n tane elemanın içerisinden n_1 tanesi benzer, n_2 tanesi benzer ...n_r tanesi benzer ise $n_1 + n_2 + ...n_r = n$ tane elemanın farklı sıralanışının sayısı

$\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! ... n_r!}$ olur.

ÖRNEK

$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin elemanları ile rakamları farklı altı basamaklı sonu 34 ile biten kaç sayı yazılır?

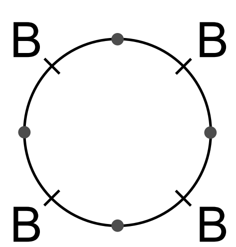
ÇÖZÜM

_ _ _ _ $\underline{3}$ $\underline{4}$ ilk dört basamağa geriye kalan 4 farklı sayı $4! = 24$ biçimde yazılır.

ÖRNEK

5 kişilik bir şirketin yönetim kurulu yuvarlak bir masa etrafında toplantı yapacaktır. Başkanın oturacağı koltuk belli olduğuna göre, kurul masaya kaç farklı biçimde oturur?

ÇÖZÜM



4 kişi yuvarlak masa etrafında $(4 - 1)! = 3!$ şekilde oturur. Başkanın koltuğu belli olduğundan 4 farklı yere oturabilir.

Toplam $= 4 \cdot 3! = 4!$ biçimde oturabilirler.

ÖRNEK

4455582 rakamlarından oluşan 7 haneli bir telefon numarası kaç kez arandığında kesinlikle doğrusu bulunur?

ÇÖZÜM

1 defa yazılan rakamlar alınmayabilir.

1! = 1'dir.

$n = 7, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 3$

$$p\binom{7}{2,3} = \frac{7!}{2! \cdot 3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2! \cdot 3!} = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 420$$

ÖRNEK

6 farklı anahtar dairesel bir anahtarlığa kaç farklı biçimde takılır?

ÇÖZÜM

Anahtarlık havada döndüğünde sıralama dairesel sırlamanın yarısı kadar olur.

$$\frac{(n-1)!}{2} \Rightarrow \frac{(6-1)!}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

KOMBİNASYON

- n tane eleman içerisinden r tanesinin seçilmesi işlemine n'nin r'li kombinasyonu denir.
- $C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ ile bulunur.

Örnek: $C(7,3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!.3!} = \frac{7!}{4!.3!}$

$$= \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 35$$

Kombinasyonun Özellikleri

- $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$
- $\binom{n}{r}=\binom{n}{k}$ ise ya $r=k$ dir yada $n-k=r$'dir.
- $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{n}{n}=2^n$
- $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$

ÖRNEK

4 kız, 6 erkek arasında 3 kişilik bir grup oluşturulacaktır. En az bir kız olacak şekilde kaç farklı grup oluşturulur?

ÇÖZÜM

$\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}+\binom{4}{3}$ $4\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot 6+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}$ $60+36+4=100$

ÖRNEK

Bir çember etrafında bulunan 9 nokta kaç üçgen belirtir?

ÇÖZÜM

Düzlemde doğrusal olmayan farklı 3 noktanın birleşim kümesi bir üçgen belirtir.

$$\binom{9}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=84$$

DENEY	Bir durum ile ilgili sonuçların elde edilmesi için yapılan işleme denir.
ÇIKTI	Deneyden elde edilen sonuçların her birine çıktı denir.
ÖRNEK UZAY	Mümkün olan tüm çıktılara örnek uzay denir. Örnek uzay E harfi ile gösterilir.
OLAY	Örnek uzayın her bir çıktısına olay denir.
İMKANSIZ OLAY	Olası tüm durumların kümesi boş olan olaya imkânsız olay denir.
KESİN OLAY	Olası tüm durumların kümesi örnek uzaya eşit olan olaya kesin olay denir.
AYRIK OLAY	Bir örnek uzayda tanımlanan iki olayın ortak elemanı yoksa, aynı anda gerçekleşmesi mümkün olmayan bu iki olaya ayrık olay denir.
TÜMLEYEN OLAY	Bir deney sonucunda elde edilen olayların kesişimi boş küme birleşimi örnek uzayı oluşturuyorsa bu iki olaya tümleyen olaylar denir. A olayının tümleyeni A′ ile gösterilir.
OLASILIK	P(A): A olayının gerçekleşme olasılığı; $P(A)\colon \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{\text{İstenen durum sayısı}}{\text{Tüm durum sayısı}}$

- Bir A olayının olma olasılığı daima $0 \leq P(A) \leq 1$'dir.
- Bir A olayının olmama olasılığı $P(A')$ ise;
- $P(A) + P(A') = 1$'dir.
- A ve B Ayrık olaylar ise;

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A ve B bağımsız olaylar ise;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

SAYISAL MANTIK

- Bu bölümdeki soruların çözümü için belirli bir tek yöntem yoktur.
- Temel matematik bilgileri ve problem çözme becerileri kullanılır.

Problem Çözme

- Problemi anlama
- Çözümü için plan yapma
- Planı uygulama
- Kontrol etme

biçiminde dört aşamada gerçekleşir.

Albert Einstein "Bana çözmem için bir soru sorulur ve bir saatlik süre tanınırsa; 45 dakikasını soruyu tanıyıp, okuyup anlamaya, 10 dakikasını çözüm yolu üretmeye ve geri kalan 5 dakikasını da soruyu çözmeye ayırırım." diyerek sorunun anlaşılması aşamasının önemine dikkat çekmiştir.

Sayısal mantık; sayısal yetenek, şekil yeteneği ve tablo grafik olarak alt başlıklara ayrılabilir.

Sayısal Mantık Sorularının Çözümünü Kolaylaştıran Yöntemler

Zamana karşı yarışılan sınavlarda hız kazanabilmek için oldukça fazla pratik yapmak önemlidir.

- Sorunun sonunda altı çizili veya koyu yazılan kısım daha dikkatli incelenmelidir.
- Sayısal mantık sorularında bir tarafa verilenler, bir tarafa istenenler yazılarak soruların çözümünde kolaylık sağlanabilir.
- Temel matematik bilgilerine hakim olunması gerekmektedir.
- Her sorunun kendine ait bir çözüm tekniği bulunmaktadır. Sorunun çözümüne yardımcı olacak tablo oluşturmak en bilinen yöntemlerdendir.
- Soruda verilenlerin matematik cümlesine çevrilmesi çözümde kolaylık sağlayacaktır.
- Soru çözümlerinde simge kullanmak soruyu görselleştirir ve çözümü kolaylaştırır.

ÖRNEK

Kübra, Asya, Adem, Yusuf isimli öğrenciler; Türkçe, Matematik, İngilizce ve Almanca kurslarına gitmektedirler.

- Her öğrenci iki farklı kursa gitmektedir.
- Türkçe kursuna katılan, Matematik kursuna da katılmaktadır.
- Asya ile Yusuf ikisi de aynı kurslara gitmektedir.
- Kübra, Almanca kursuna gitmemektedir.
- Bu öğrencilerden 3'ü Matematik, 2'si Türkçe, 2'si İngilizce, 1'i Almanca kursuna gitmektedir.

Buna göre Adem hangi kurslara gitmektedir?

ÇÖZÜM

Sorunun çözümü için verilen önermeleri bir tablo halinde düzenleyelim.

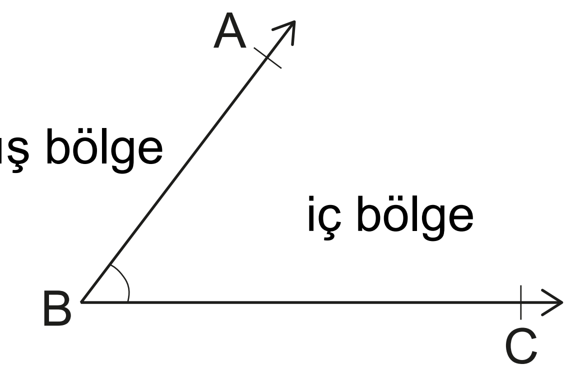
	Türkçe	Matematik	İngilizce	Almanca
Kübra	✗	✓	✓	✗
Asya	✓	✓	✗	✗
Adem	✗	✗	✓	✓
Yusuf	✓	✓	✗	✗
	2	3	2	1

Verilen önermeler doğrultusunda tabloda öğrencilerin katıldığı kurslar (✓) işaretiyle belirlenmiştir. Tabloya göre Adem'in katıldığı kurslar İngilizce ve Almanca kursları olmalıdır.

DOĞRUDA VE ÜÇGENDE AÇILAR

AÇI

Başlangıç noktası aynı olan iki ışının birleşimine **açı** denir.

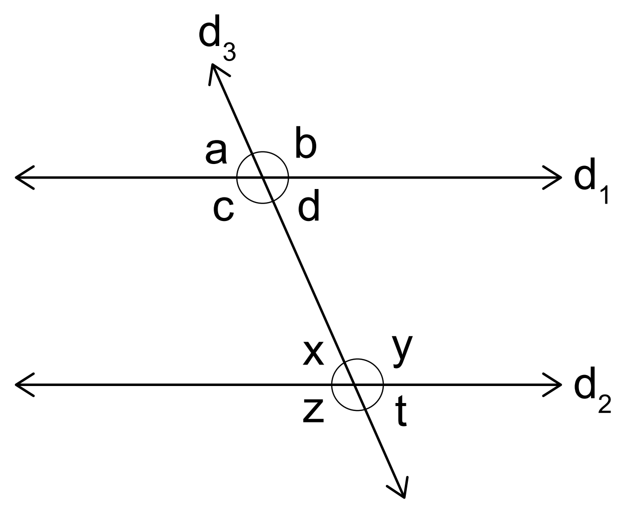


$A\widehat{B}C$ veya $C\widehat{B}A$ veya $\widehat{B}$ olarak gösterilir.

AÇI ÇEŞİTLERİ	
Dar Açı	• Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açılara dar açı denir.
Dik Açı	• Ölçüsü 90° olan açıya dik açı denir.
Geniş Açı	• Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açıya geniş açı denir.
Doğru Açı	• Ölçüsü 180° olan açıya doğru açı denir.
Tam Açı	• Ölçüsü 360° olan açıya tam açı denir.
Komşu Açı	• Köşeleri ve birer kenarı ortak olan açılara komşu açılar denir.
Açıortay	• Bir açıyı iki eş açıya ayıran ışına açıortay denir. • Açıortay üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına olan dik uzaklıkları eşittir.

Tümler Açılar	• Ölçüleri toplamı 90 olan iki açıya tümler açılar denir. • $\alpha + \beta = 90°$ ise ile α ile β tümlerdir
Bütünler Açılar	• Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya bütünler açılar denir. • Ölçüleri toplamı 180° ise $\alpha + \beta = 180°$ α ile β bütünlerdir.
Ters Açılar	• Kesişen iki doğru arasında kalan açılardan komşu olmayan açılar ters açılardır. Ters açıların ölçüleri eşittir. Kesişen iki doğru arasındaki açılardan komşu olanlar bütünlerdir.

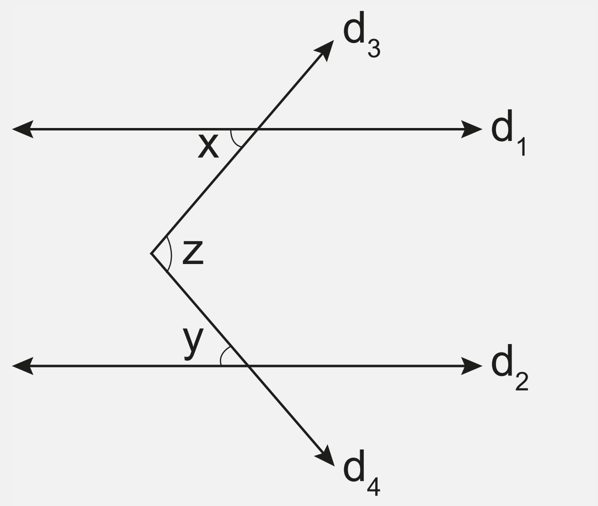
PARALEL İKİ DOĞRUNUN BİR KESEN İLE YAPTIĞI AÇILAR



d_1 // d_2 ve a, b, c, d, x, y, z t gösterdikleri açının ölçüsü olmak üzere;

- Yöndeş açılar birbirine eşittir; $x = a$, $y = b$, $z = c$, $t = d$
- İç ters açılar birbirine eşittir; $x = d$, $y = c$
- Dış ters açılar birbirine eşittir; $t = a$, $z = b$
- Karşı durumlu açılar bütünlerdir;
  $x + c = 180$, $y + d = 180$'dir.

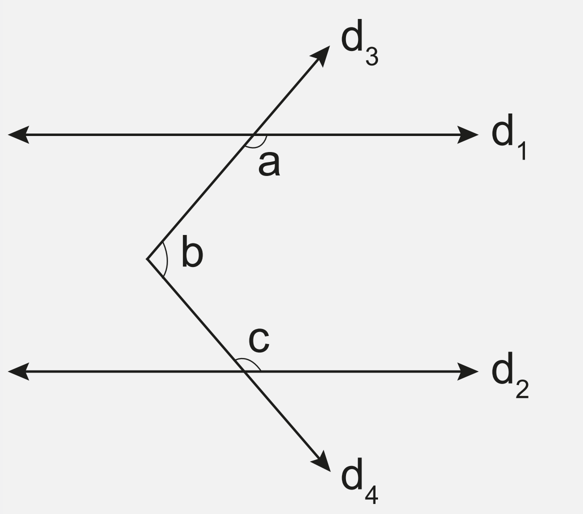
•



$d_1 \parallel d_2$

$z = x + y$

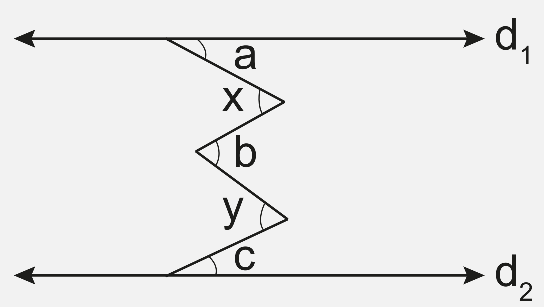
•



$d_1 \parallel d_2$

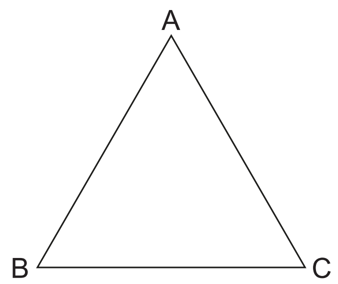
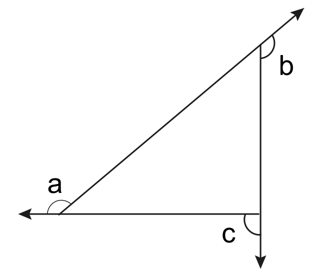
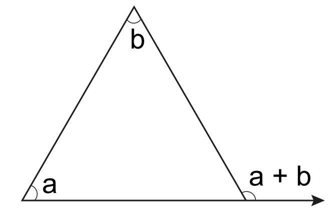
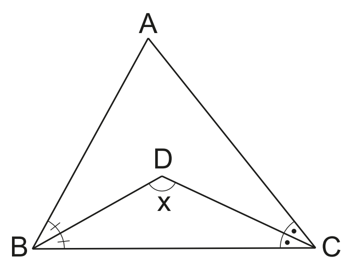
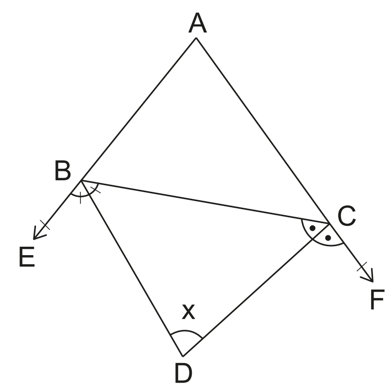
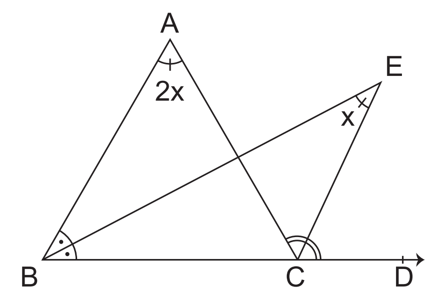
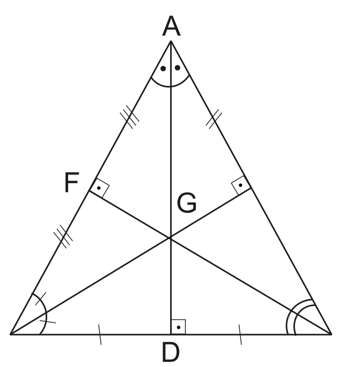
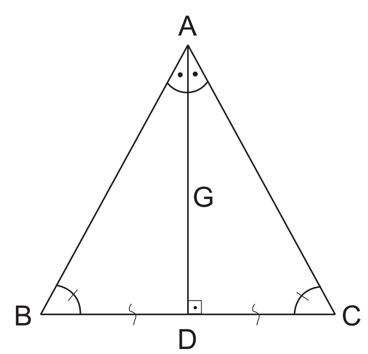
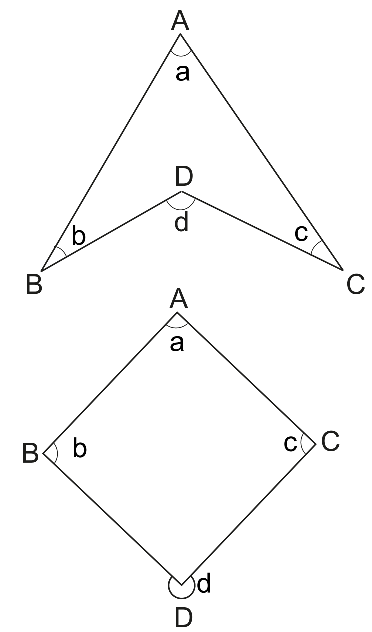
$a + b + c = 360$

•



$d_1 \parallel d_2$

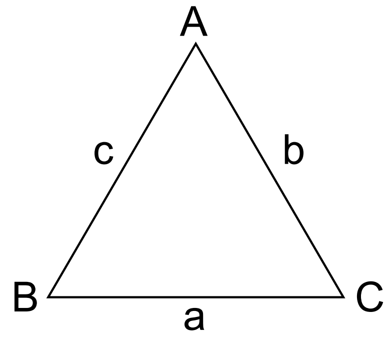
$a + b + c = x + y$

ÜÇGENDE AÇILAR		
• Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180°dir. • $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ 	• Bir üçgenin dış açıları toplamı 360°dir. • $a + b + c = 360°$ 	• Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir. 
• ABC üçgeninde iki iç açıortayın kesişmesi ile oluşan; • $m(B\widehat{D}C) = x = 90 + \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ 	• ABC üçgeninde dış açıortayların oluşturduğu; • $m(B\widehat{D}C) = x = 90 - \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ 	• Bir üçgende bir iç açı ile bir dış açının açıortaylarının kesişiminden oluşan; • $m(B\widehat{E}C) = x$ ise $m(B\widehat{A}C) = 2x$ olur. 
• Eşkenar üçgende bütün kenarlara ait açıortay, kenar ortay, yükseklik çakışıktır ve eşittir. 	• İkizkenar bir üçgende ikiz olmayan kenara indirilen dikme, hem kenarortay hem açıortay hem de yüksekliktir. 	• a, b, c, d bulundukları açıların ölçüleri olmak üzere; $a + b + c = d$'dir. 

ÜÇGENDE AÇI KENAR BAĞINTILARI ÖZEL ÜÇGENLER - AÇIORTAY KENARORTAY BAĞINTILARI

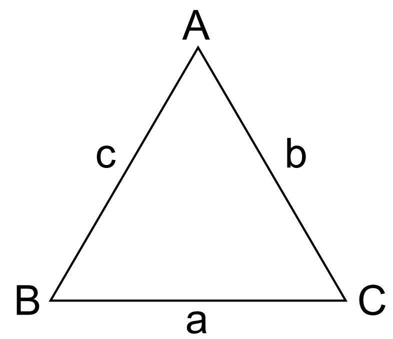
ÜÇGENDE AÇI - KENAR BAĞINTILARI

- Bir üçgenin iç açıları ile karşılarındaki kenarlar arasındaki sıralama aynıdır.
- $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ şeklinde açılar arasında sıralama varsa $a > b > c$ şeklinde kenarlar arasında sıralama vardır.



ÜÇGEN EŞİTSİZLİĞİ

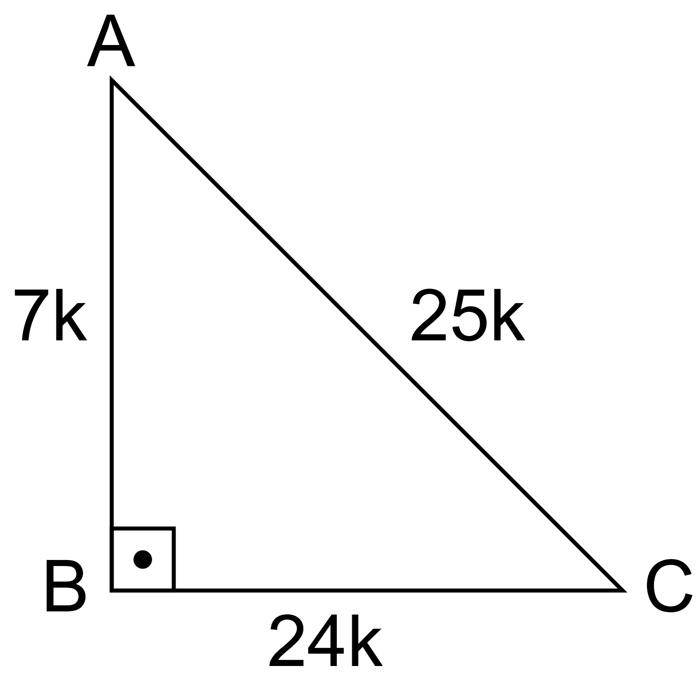
- Bir üçgenin herhangi bir kenarı diğer iki kenarın toplamından küçük farkından büyüktür.

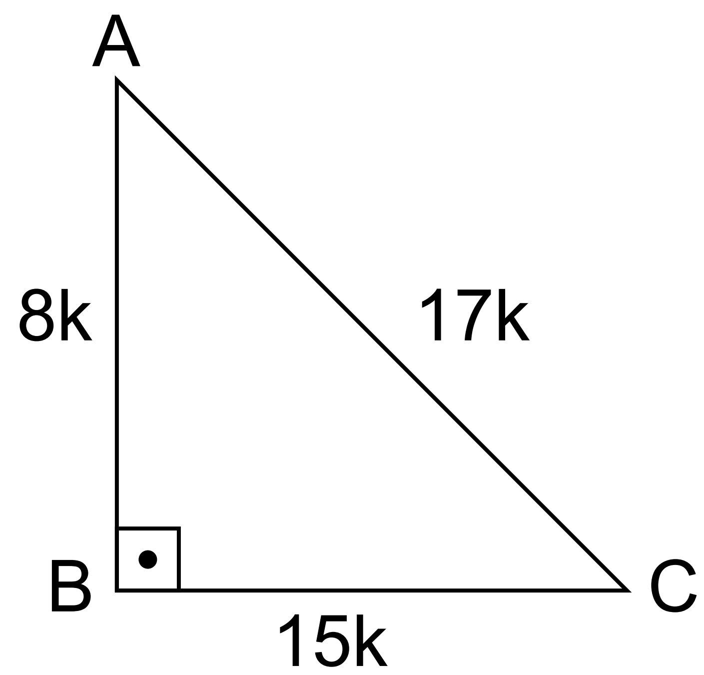


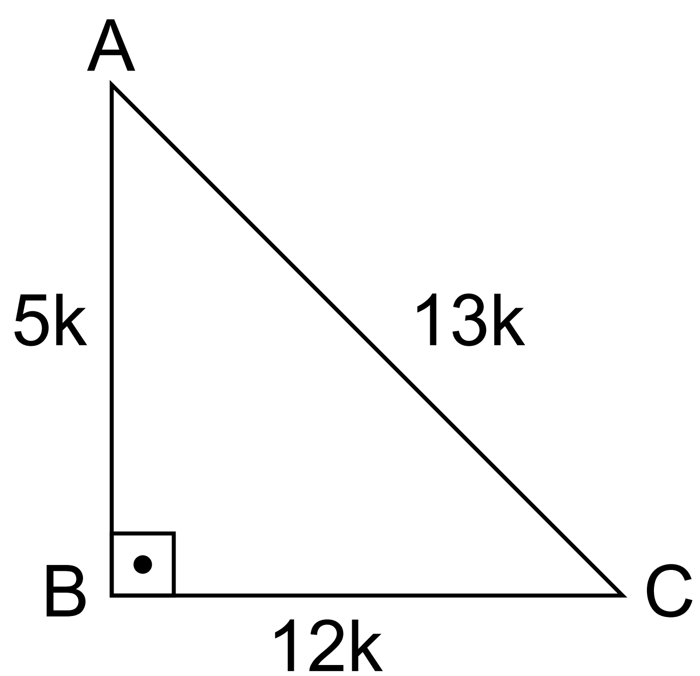
$$a+b>c>|a-b|$$
$$a+c>b>|a-c|$$
$$b+c>a>|b-c|$$

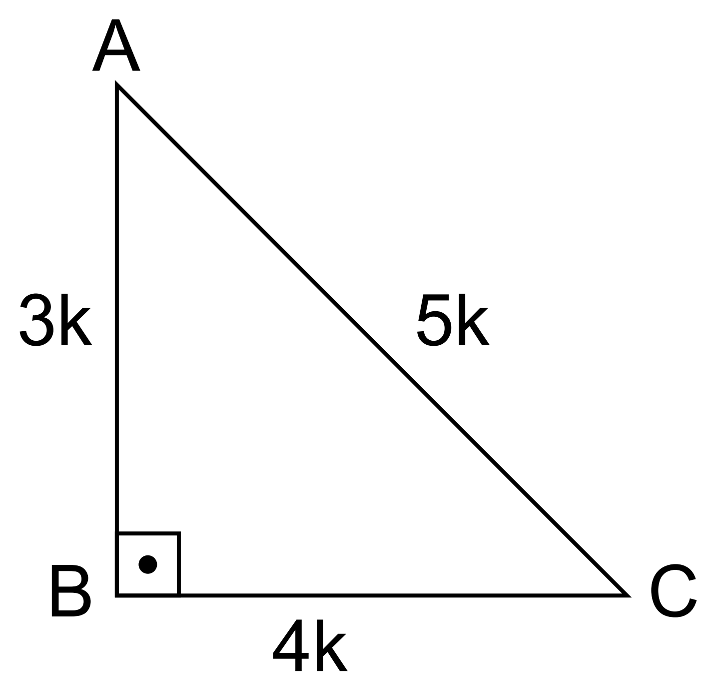
ÖZEL ÜÇGENLER

Kenarlarına Göre Özel Üçgenler

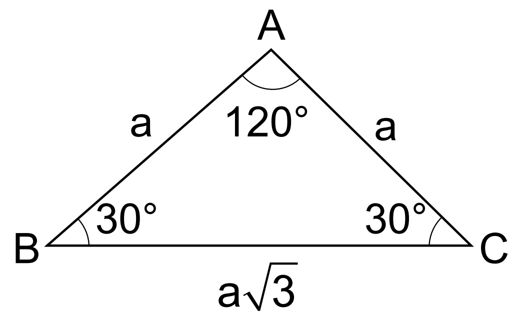


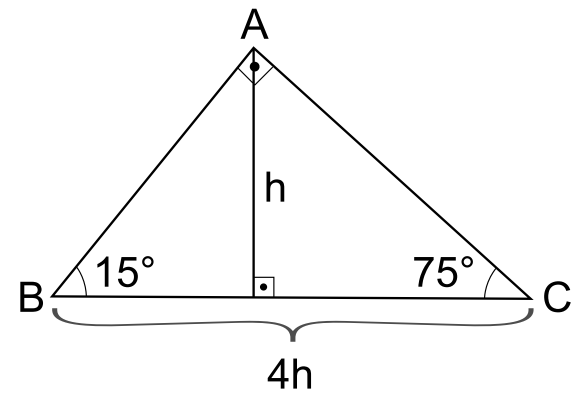


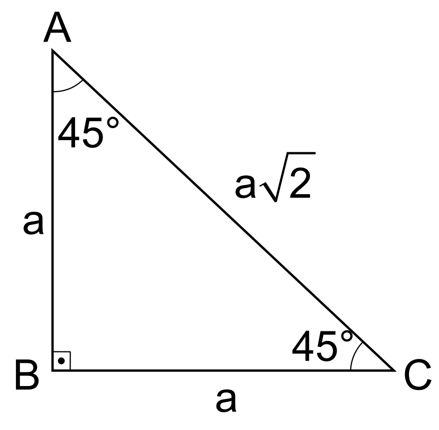


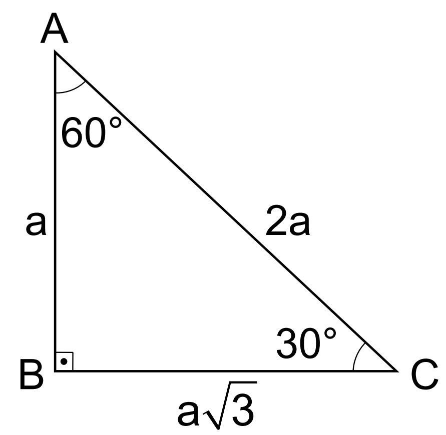


Açılarına Göre Özel Üçgenler

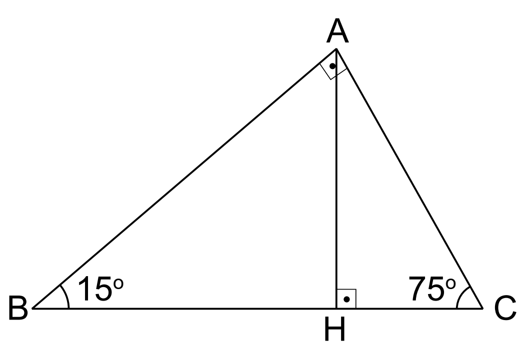








ÖRNEK



ABC dik üçgen

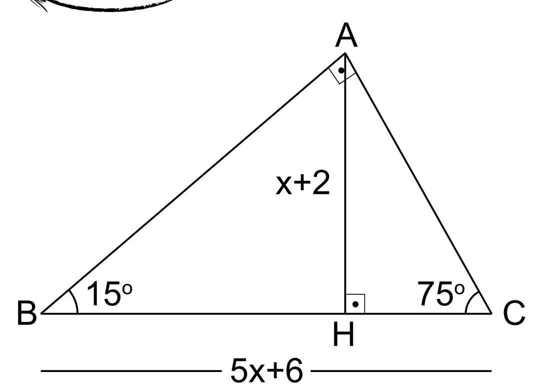
$[AH] \perp [BC]$

$|AH| = (x + 2)$ cm

$|BC| = (5x + 6)$ cm

Yukarıda verilenlere göre x kaç cm'dir?

ÇÖZÜM



90° – 75° – 15° üçgeninde yükseklik h ise hipotenüs $4 \cdot h$ olur.

Buna göre,

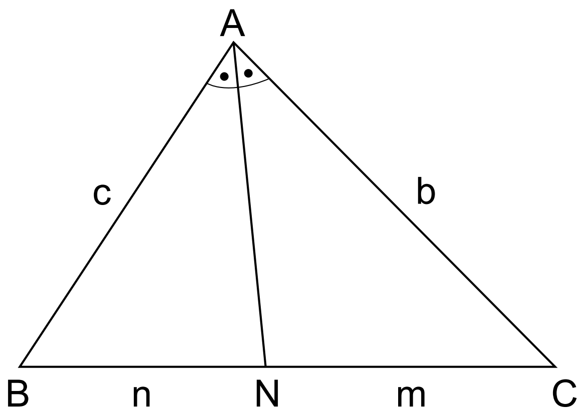
$|BC| = 4 \cdot |AH|$

$5x + 6 = 4 \cdot (x + 2)$

$5x + 6 = 4 \cdot x + 8 \Rightarrow x = 2$ cm olur.

AÇIORTAY - KENARORTAY BAĞINTILARI

İç Açıortay Teoremi

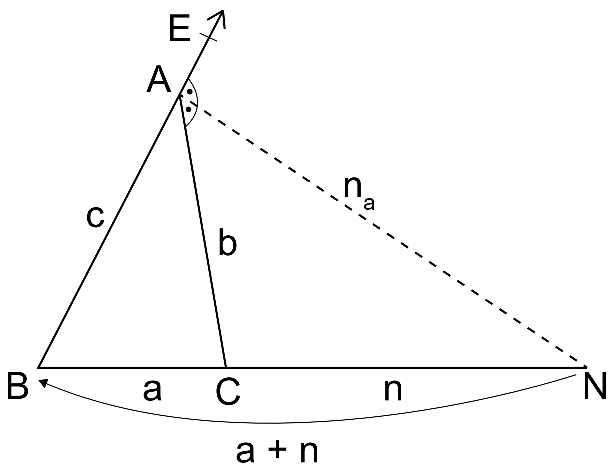


Bir üçgende iç açıortay kestiği kenarı komşu kenarları oranında böler.

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|NC|} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{n}{m}$$

İç açıortay uzunluğu; $|AN| = \sqrt{b \cdot c - n \cdot m}$

Dış Açıortay Teoremi



ABC bir üçgen

[AN] dış açıortay, $m(C\widehat{A}N) = m(E\widehat{A}N) = \frac{b}{c} = \frac{n}{n+a}$'dır.

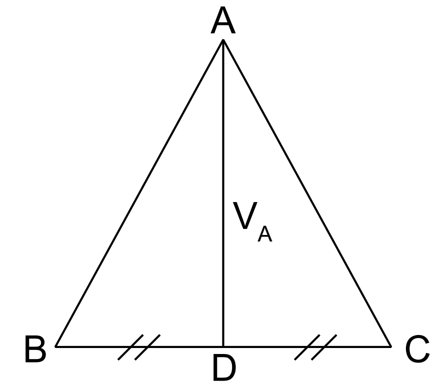
$$|AN| = \sqrt{n \cdot (n+a) - b \cdot c}$$

Üçgende Kenarortay

Bir üçgende bir kenarının orta noktasını karşısındaki köşeye birleştiren doğru parçasına o kenara ait kenarortay denir.

[AD], [BC] kenarına ait kenarortaydır.

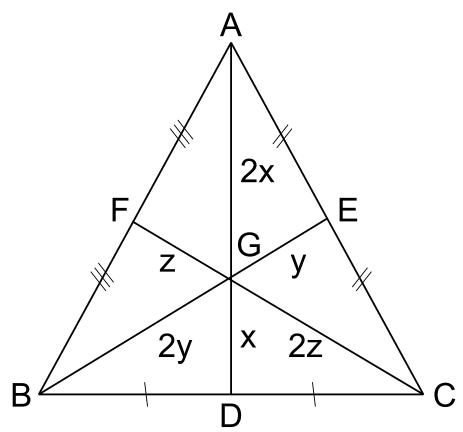
$|AD| = V_A$ kenarortayın uzunluğudur.



Ağırlık Merkezi

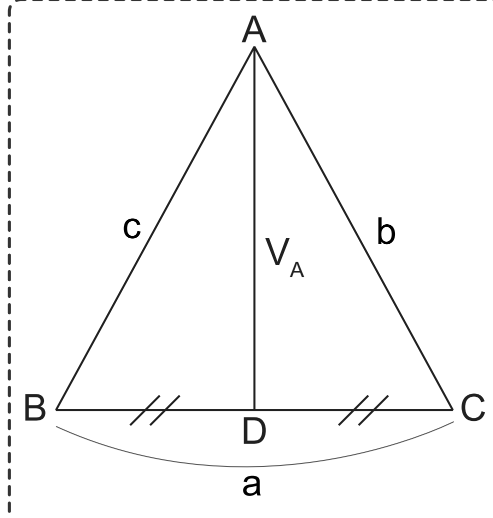
Bir üçgende üç kenara ait kenarortaylar bir noktada kesişirler. Bu kesişim noktasına üçgenin ağırlık merkezi denir. G harfi ile gösterilir.

Ağırlık merkezi kenarortayın uzunluğunu tabana uzaklığı 1 birim, köşeye uzaklığı 2 birim olacak şekilde böler.



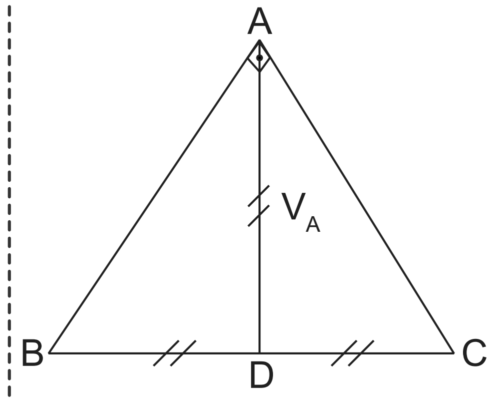
$\|GD\| = x$	$\|GA\| = 2x$
$\|GF\| = z$	$\|GC\| = 2z$
$\|GE\| = y$	$\|GB\| = 2y$

KENARORTAY BAĞINTILARI



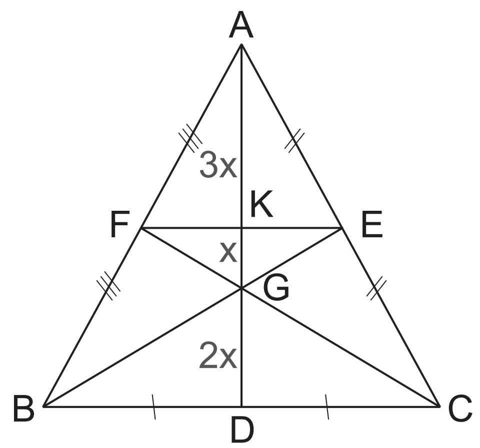
Benzer şekilde diğer kenarortaylar için bağıntı uygulanırsa;

- $2V_A^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$
- $2V_C^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$
- $2V_B^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$



Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun yarısına eşittir

$V_A = |BD| = |DC| = \frac{|BC|}{2}$



Bir üçgende bir kenara ait orta taban ile ağırlık merkezi arasındaki uzaklık, o kenara ait kenarortayın $\frac{1}{6}$'sıdır.

- $4\left(V_A^2 + V_B^2 + V_C^2\right) = 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

ÜÇGENDE BENZERLİK - ÜÇGENDE ALAN

ÜÇGENDE BENZERLİK

Benzerlik Oranı

• Herhangi bir geometrik şeklin belirli oranda büyültülüp küçültülmesi ile elde edilen şekil, ilk şeklin benzeridir. Bir şeklin büyültülüp küçültüldüğü orana, benzerlik oranı denir.

• İki üçgenin benzer olduklarının anlaşılabilmesi için belirli şartları sağlaması gerekir. Bunlar;

Açı – Açı – Açı / Kenar – Açı – Kenar / Kenar – Kenar – Kenar olarak özetlenir.

Açı - Açı - Açı Benzerlik Kuralı

• Karşılıklı ikişer açısı eş olan iki üçgen (A – A – A) benzerlik kuralına göre benzerdir ve eş açıların karşısındaki kenarların oranları eşittir.

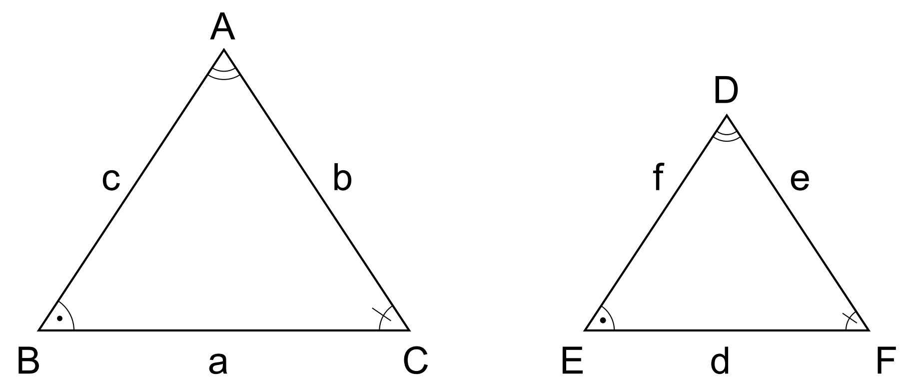
Kenar - Açı - Kenar Benzerlik Kuralı

• İki üçgende karşılıklı ikişer kenar orantılı ve bu iki kenar arasındaki açı eşit ise bu iki üçgen benzerdir. (K – A – K)

Kenar - Kenar - Kenar Benzerlik Kuralı

• İki üçgnede karşılıklı üç kenar orantılı ise bu iki üçgen benzerdir. (K – K – K)

TEMEL BENZERLİK TEOREMİ

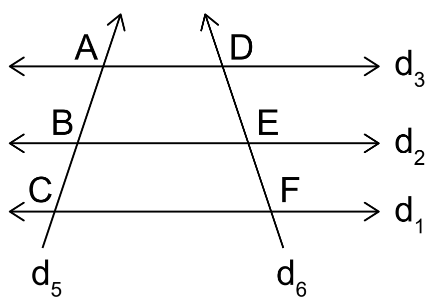


$m(\widehat{A})=m(\widehat{D})$, $m(\widehat{B})=m(\widehat{E})$, $m(\widehat{C})=m(\widehat{F})$ olduğundan A – A – A benzerlik kuralından $\widehat{ABC}$ üçgeni $\widehat{DEF}$ üçgenine benzerdir denir. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ şeklinde gösterilir.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olduğundan; $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$ biçimindeki oranların eşitliğine temel benzerlik teoremi denir. (k benzerlik oranı)

Tales Teoremi

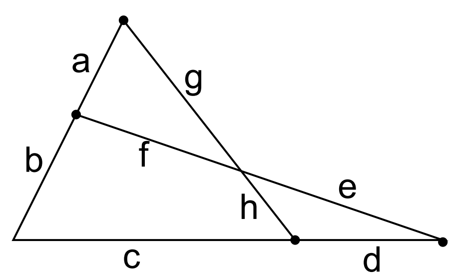
• Birbirine paralel üç doğru, iki kesen ile kesildiğinde ortaya çıkan bazı uzunluklar orantılıdır. $d_1 // d_2 // d_3$ ise;



$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|DE|}{|EF|}$$

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|DF|}$$

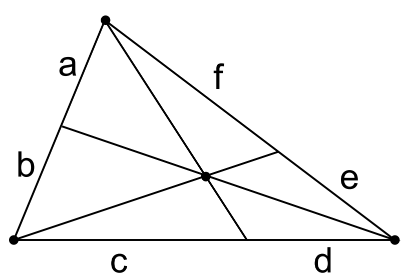
Menelaus Teoremi



$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1$$

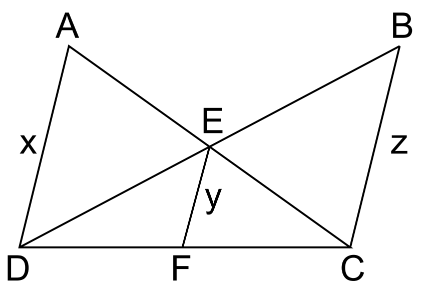
$$\frac{d}{c+d}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{g}{h}=1$$

Seva Teoremi



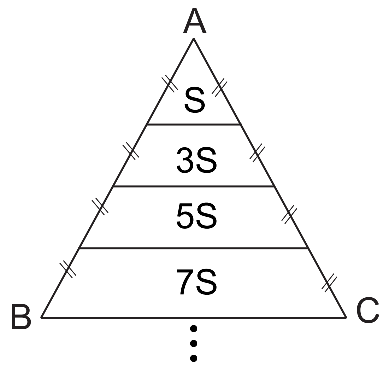
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1$$

• $[AD] // [EF] // [BC]$ ve $|AD| = x$, $|FE| = y$, $|BC| = z$ ise;



$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\text{'dir.}$$

- Benzer üçgenlerde kenarlar arasındaki benzerlik oranı aynı zamanda kenarortaylar, açıortaylar ve yükseklikler arasındaki orana eşittir.
- Benzer üçgenlerdeki kenarların oranı aynı zamanda çevreleri oranına eşittir.

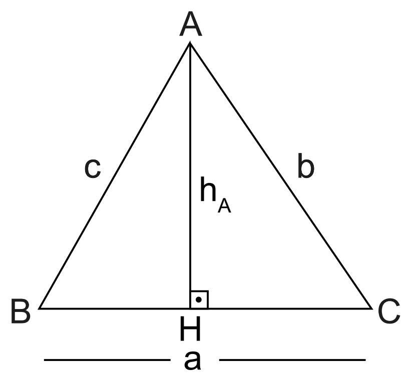


Bir üçgenin kenarları paralel doğru parçalarıyla eş uzunluklarda bölünür ise, alanları şekildeki gibi oranlanır.

- Benzer olan iki üçgenin alanları oranı, kenarları oranının karesine eşittir.

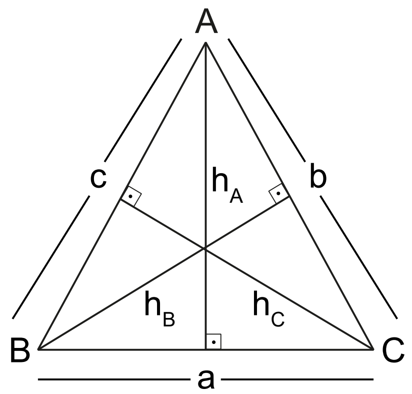
ÜÇGENDE ALAN

- Üçgenin alanı, bir taban ve o tabana ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır.



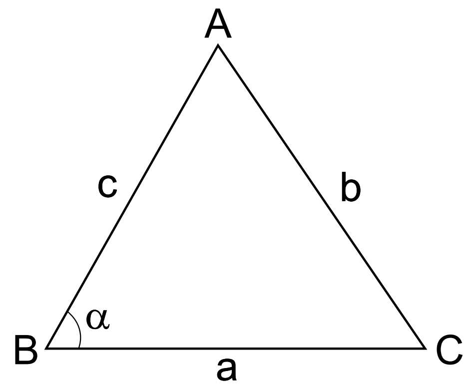
Üçgenin Alanı $= \dfrac{\text{Taban x Yükseklik}}{2} = \dfrac{|BC| \cdot |AH|}{2} = \dfrac{a \cdot h_A}{2}$

- Bir üçgende alan hesaplanırken hangi kenar taban kabul edilirse o tabana ait yükseklik ile çarpılarak yarısı alınır.



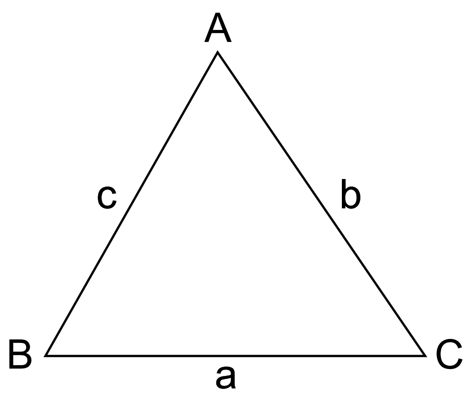
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a \cdot h_A}{2} = \dfrac{b \cdot h_B}{2} = \dfrac{c \cdot h_C}{2}$

- Bir açısı ve bu açıyı oluşturan kenarların uzunlukları biliniyorsa bu üçgenin alanı açının sinüs değeri ile kenar uzunlukları çarpımının yarısıdır.



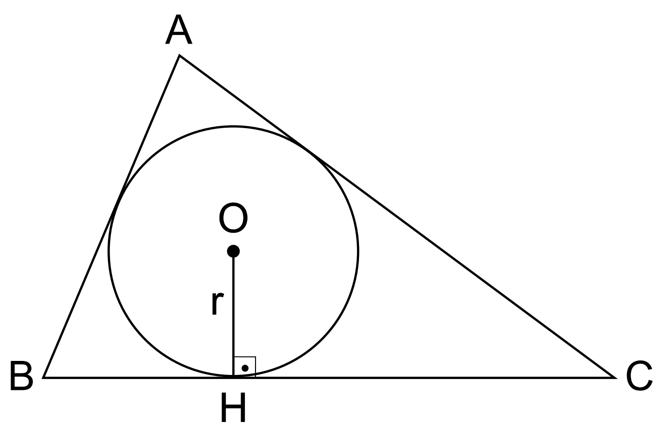
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot c \cdot a$$

- Üç kenar uzunluğu bilinen üçgenin alanı;
- $u = \dfrac{Ç\,(\widehat{ABC})}{2}$ olmak üzere;



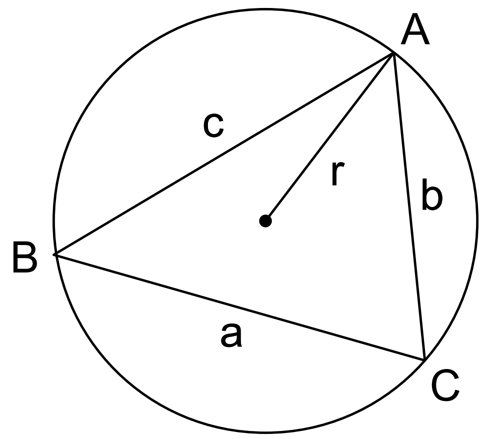
$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$$

- Şekildeki gibi O merkezli iç teğet çemberin yarıçapı = r ve çevre uzunluğu $u = \dfrac{Ç(\widehat{ABC})}{2}$ olmak üzere;



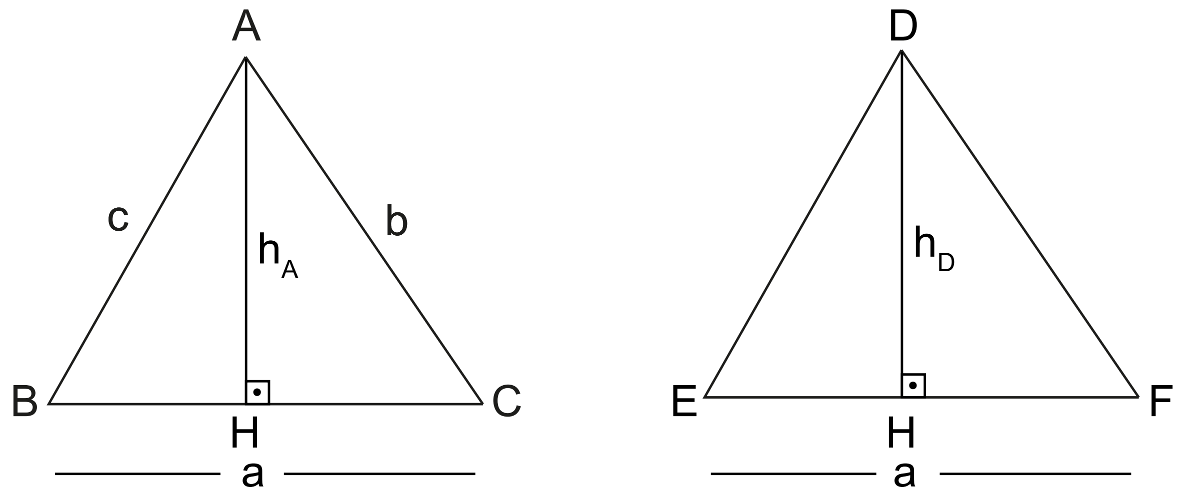
$$A(\widehat{ABC}) = u \cdot r$$

- Çevrel çemberin yarıçapı = r olmak üzere;



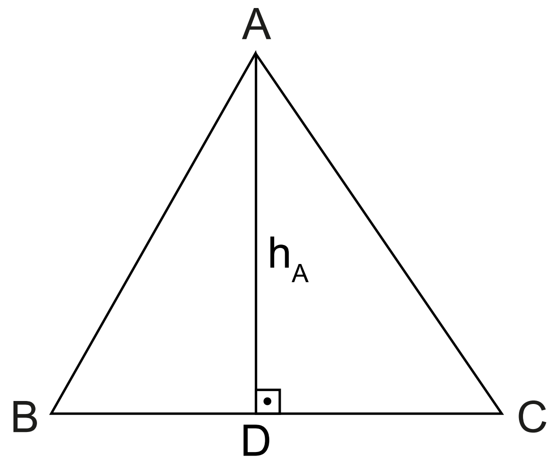
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot r}$$

- Tabanları aynı olan iki üçgenin alanları oranı yükseklik oranına eşittir.



$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{h_A}{h_D}$$

- Yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanları oranı tabanları oranına eşittir.



$$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{DCA})} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

ÇOKGENLER VE DÖRTGENLER

ÇOKGEN

Kenarları doğru parçaları olan kapalı geometrik şekillere **çokgen** denir.

KÖŞEGEN

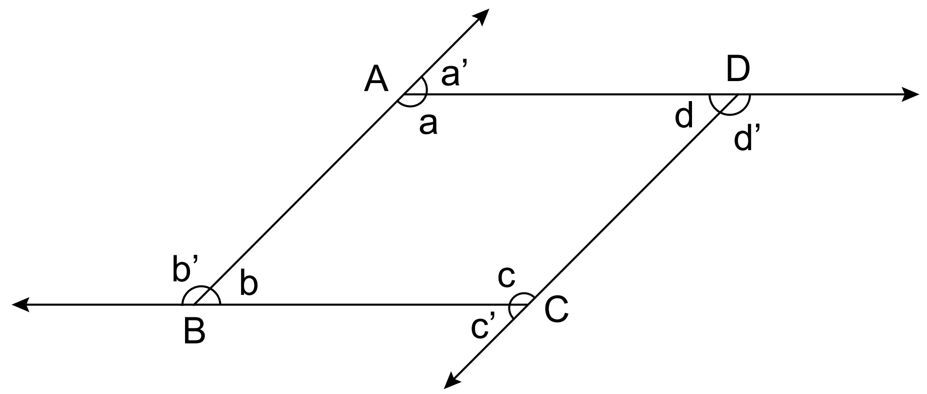
Bir çokgende ardışık olmayan köşeleri birleştiren doğru parçalarına **köşegen** denir.

Çokgenlerin Özellikleri

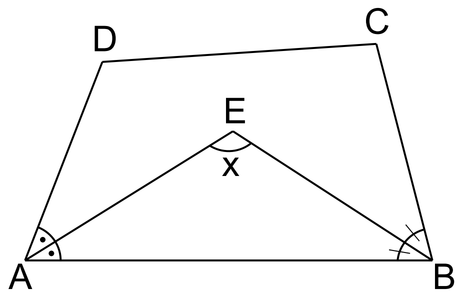
- n kenarlı bir çokgenin iç açıları toplamı: $(n-2)\cdot 180$'dir.
- Bir çokgenin dış açıları toplamı 360°dir.
- n kenarlı bir çokgenin köşegen sayısı $= \frac{n(n-3)}{2}$'dir.
- n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden $(n-3)$ tane köşegen geçer ve çokgeni $(n-2)$ tane üçgensel bölgeye ayırır.
- Tüm iç açıları, tüm dış açıları, tüm kenarları birbirine eşit olan çokgenlere **düzgün çokgen** denir.
- n kenarlı düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü $= \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$'dir.
- n kenarlı düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü; $\frac{360}{n}$'dir.
- Düzgün çokgenlerin iç açıortaylarının keşistiği nokta, çevrel, çember, iç teğet çember ve ağırlık merkezidir.

Dörtgenlerin Özellikleri

• Dört kenarı ve dört köşesi olan çokgene dörtgen denir. Aşağıdaki ABCD dörtgeninde a, b, c, d iç açılar a′, b′, c′, d′ dış açılardır. Aynı köşedeki iç ve dış açı bütünlerdir. Ayrıca iç açılar toplamı ve dış açılar toplamı 360°dir. Dörtgenin iki köşegeni vardır.

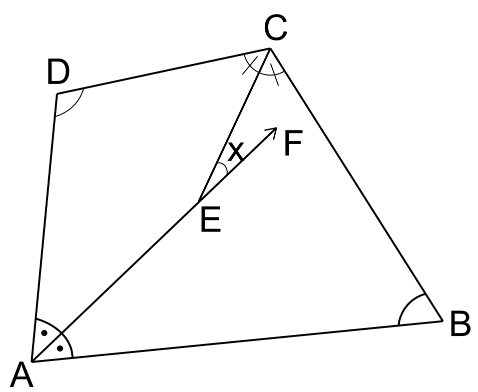


• Bir çokgende ardışık iki iç açının açıortaylarının oluşturduğu x açısı diğer iki açının toplamının yarısıdır.



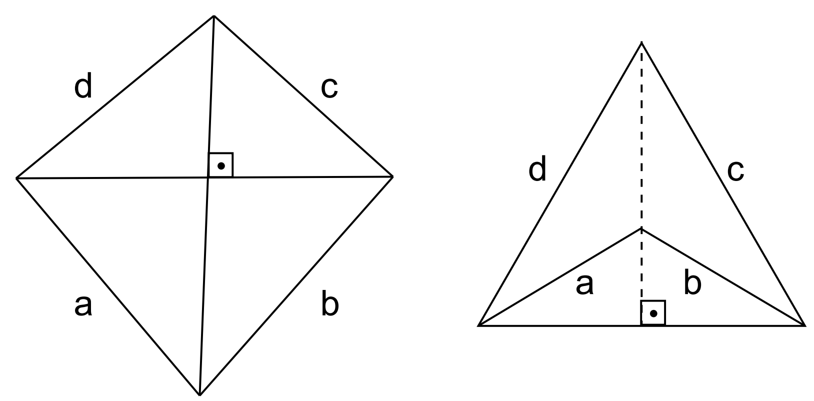
$$x = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$

• Bir çokgende karşılıklı iki açının açıortaylarının kesişimi ile oluşan dar açının (x) ölçüsü, diğer iki açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısına eşittir.



$$x = \frac{\left|m(\widehat{D}) - m(\widehat{B})\right|}{2}$$

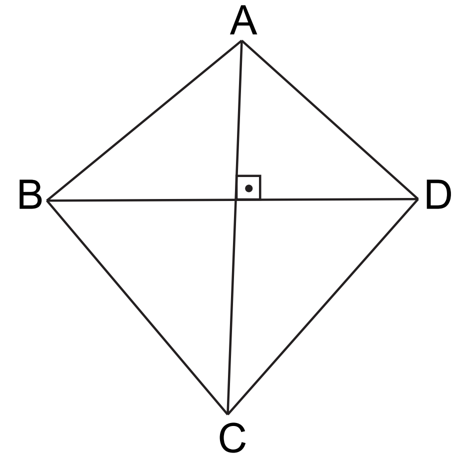
• Köşegenleri dik kesişen dörtgenlerin karşılıklı kenarlarının kareleri toplamı birbirine eşittir.

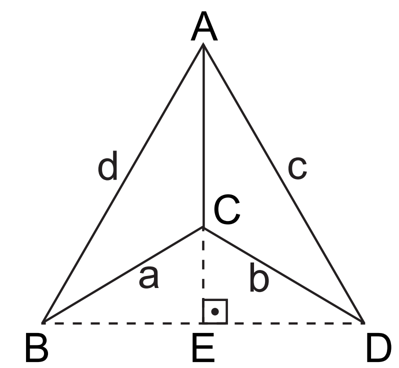


$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

DÖRTGENLERDE ALAN

- Köşegenleri dik kesişen dörtgenlerin alanı köşegenler çarpımının yarısına eşittir.

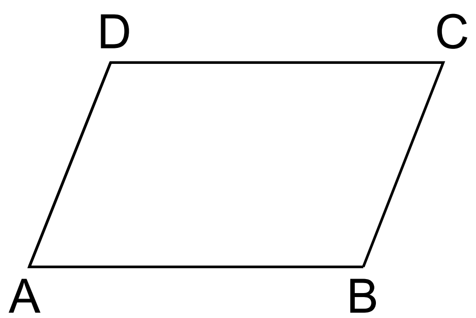


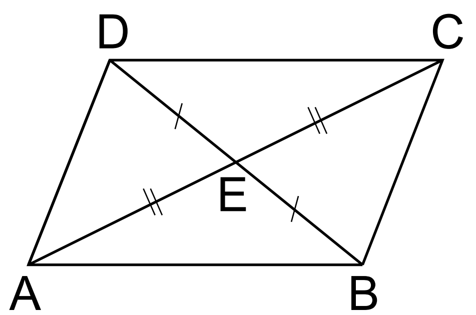


$$A(ABCD) = \frac{|AC||BD|}{2}$$

PARALELKENAR

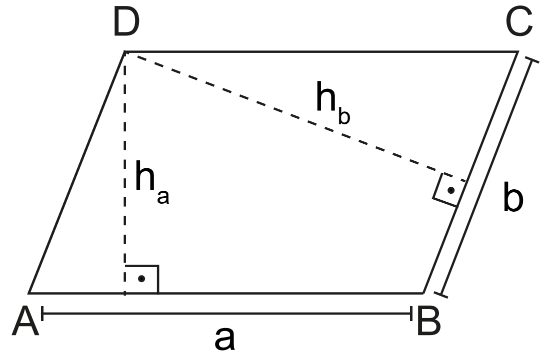
- Karşılıklı kenarları paralel ve eşittir.
- Karşılıklı açıların ölçüleri eşit ardışık açıların ölçüleri bütünlerdir.
- Köşegenler birbirini ortalar.





- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}), \quad m(\widehat{D}) = m(\widehat{B})$
- $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180°$ $\qquad m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180°$
- $|AE| = |EC|$ $\qquad |DE| = |EB|$

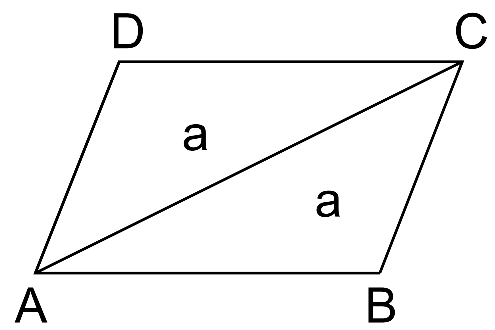
PARALELKENARDA ALAN

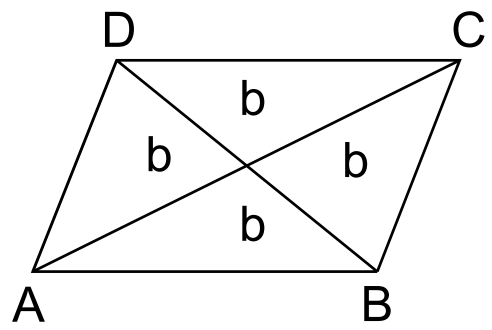
- Paralelkenarın alanı bir kenar ve kenara ait yüksekliğin çarpımıdır.
- 

$$A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

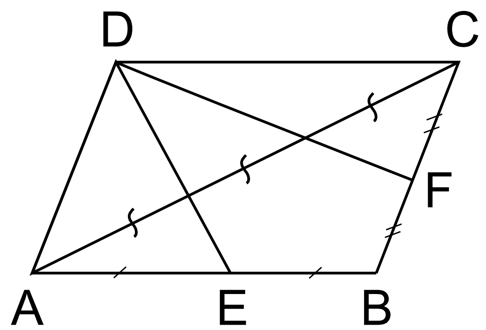
Paralelkenarın Özellikleri

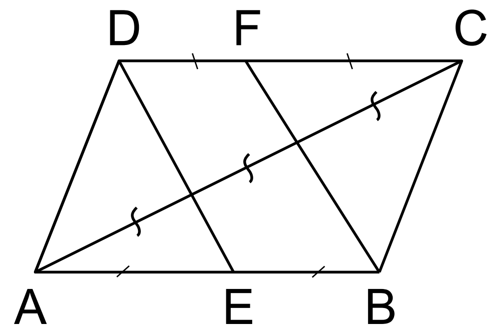
- Paralelkenarda bir köşegen alanı iki eş bölgeye ayırır.
- Paralelkenarda iki köşegen alanı dört eş bölgeye ayırır.



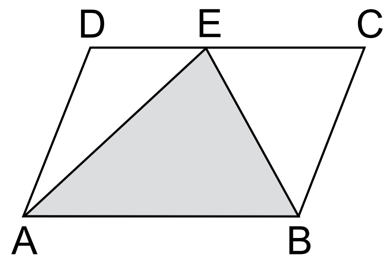


- Paralelkenarda uzunluklar ile ilgili şekil üzerinde bazı özellikler verilmiştir.

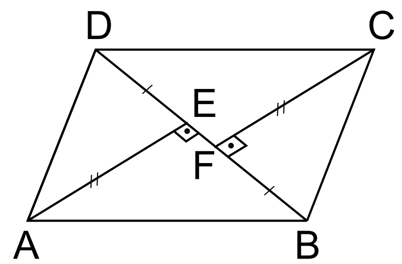




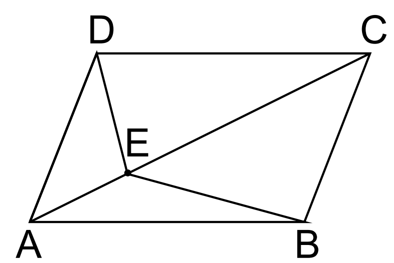
- [DC] üzerinde alınan bir E noktası ile A ve B köşeleri birleştirilince oluşan ABE üçgeni ABCD paralelkenarının alanının yarısıdır.



$A(\widehat{ABE}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$

- 

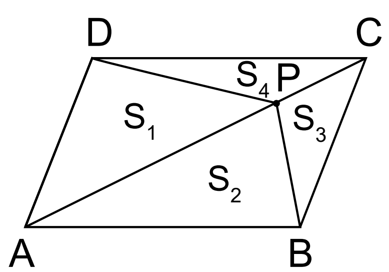
ABCD paralelkenar ise AED üçgeni ile CFB üçgeni eşittir.

- 

ABCD paralelkenar ise;

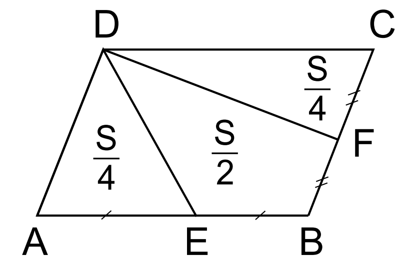
A(AED) = A(AEB)'dir.

- ABCD paralelkenar ve P paralelkenarın içinde herhangi bir nokta ise;



$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \dfrac{A(ABCD)}{2}$

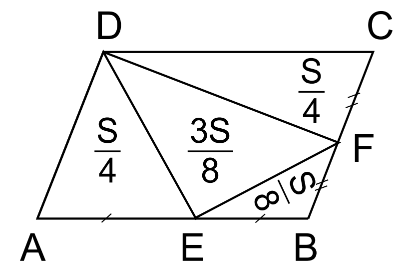
- ABCD paralelkenarının alanı S olmak üzere;



|AE| = |EB| ve |CF| = |BF| ise;

$A(\widehat{AED}) = A(FCD) = \dfrac{S}{4}$

$A(EBFD) = \dfrac{S}{2}$'dir.

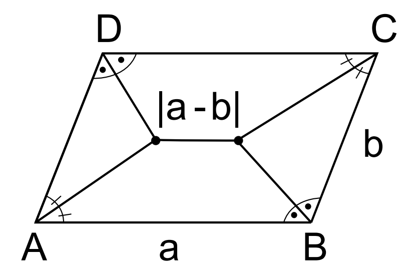
- 

ABCD paralelkenarının alanı S

|AE| = |EB| ve |CF| = |BF| ise;

$A(\widehat{AED}) = A(FCD) = \dfrac{S}{4}$

$A(\widehat{DEF}) = \dfrac{3S}{8}$ $\quad A(\widehat{EBF}) = \dfrac{S}{8}$

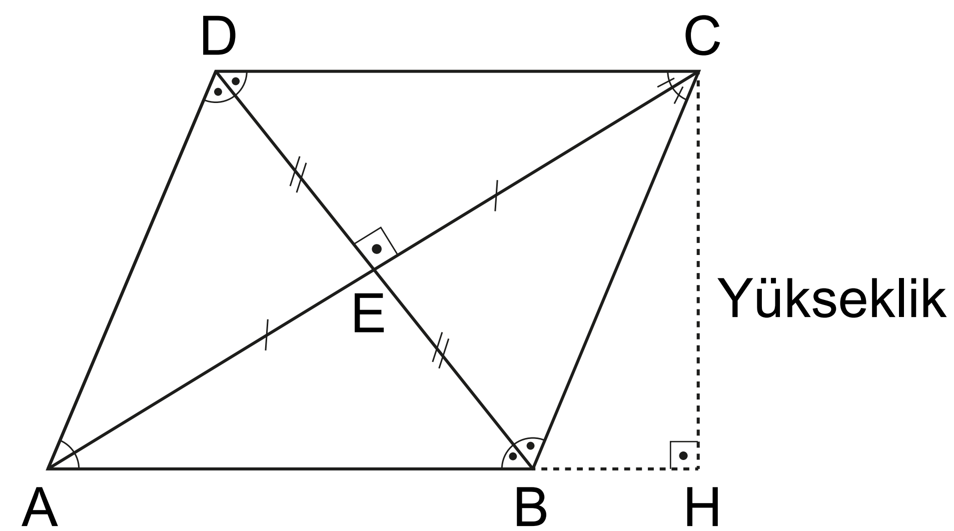
- 

Paralelkenarın kenar uzunlukları a ve b olmak üzere iç açıortayların kesim noktaları arasındaki uzaklık; |a – b|

ÖZEL DÖRTGENLER

EŞKENAR DÖRTGEN

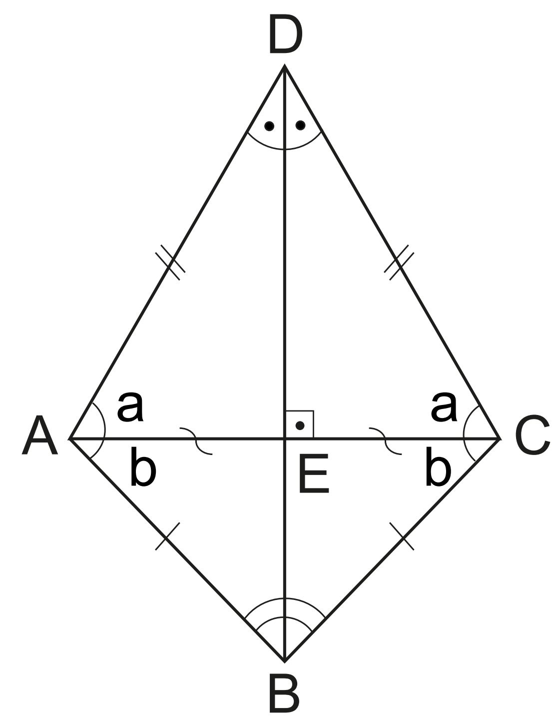
- Dört kenarı eşit olan dörtgene eşkenar dörtgen denir.
- Eşkenar dörtgen özel bir paralelkenar olduğundan, paralelkenarın bütün özelliklerini gösterir.
- Karşılıklı kenarları paraleldir.
- Bütün kenarları birbirine eşittir.
- Köşegenler aynı zamanda açıortaydır.
- Köşegenler birbirin dik ortalar.
- Eşkenar dörtgende bütün kenarlara ait yükseklikler eşittir.



$$\text{Alan} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} = |AB| \cdot |CH|$$

DELTOİD

- Taban uzunlukları eşit olan iki tane ikizkenar üçgenin eş kenarlarının birleştirilmesi ile oluşan şekle deltoid denir.



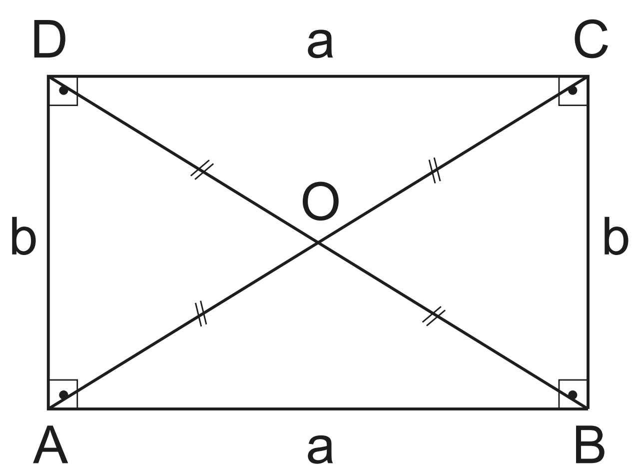
- Deltoidde köşegenler dik kesişir.
- $|AE| = |EC|$

$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |DB|}{2}$$

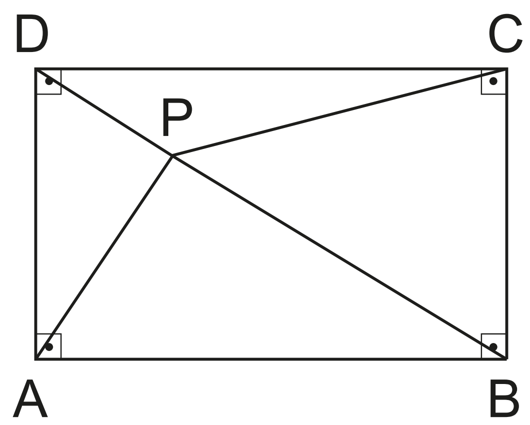
- $m(D\widehat{A}B) = m(D\widehat{C}B) = a + b$'dir.

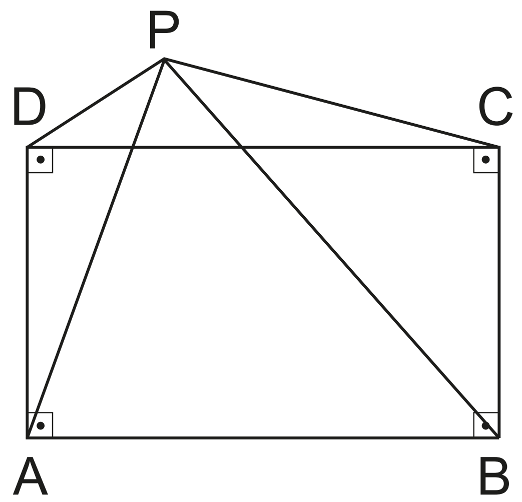
DİKDÖRTGEN

- Tüm açıları 90° olan özel bir paralelkenardır.
- Köşegenleri birbirine eşittir ve birbirini ortalar.



- Kenar uzunlukları a ve b olmak üzere;
- $Ç(ABCD) = 2(a + b)$, $A(ABCD) = a \cdot b$

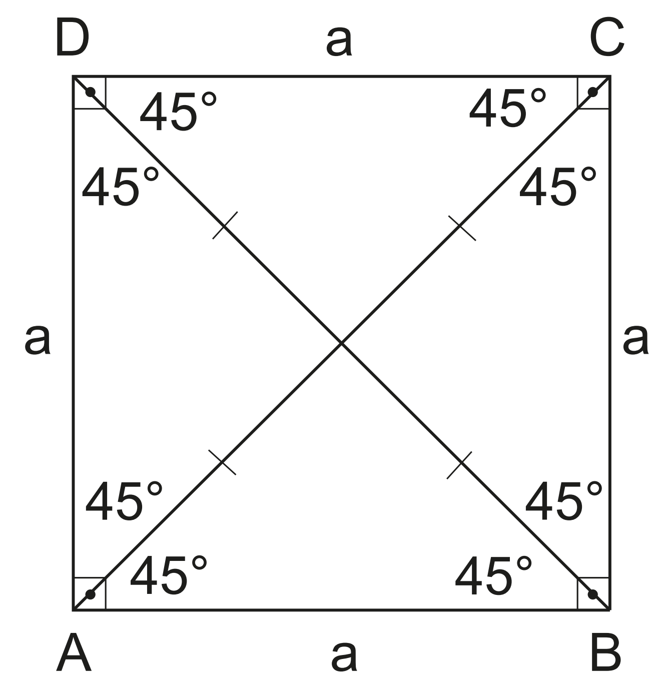




- ABCD dikdörtgeninin içinde veya dışında alınan bir P noktası için, P noktasının köşelerden uzaklığı ile ilgili bağıntı;
- $|AP|^2 + |PC|^2 = |DP|^2 + |PB|^2$ şeklindedir.

KARE

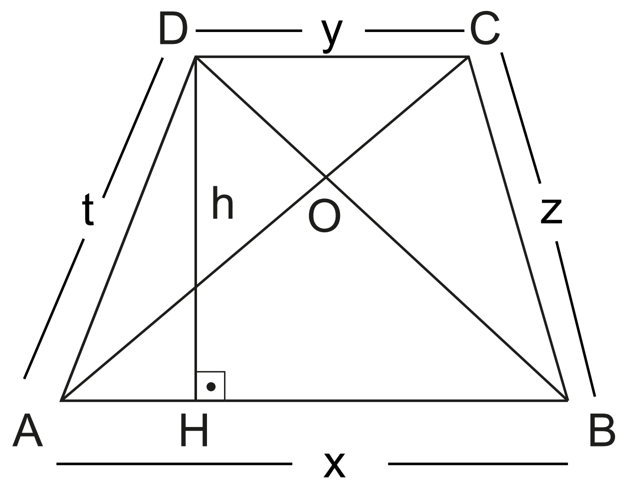
- Tüm kenar uzunlukları birbirine eşit ve açıları 90° olan dörtgene kare denir.
- Karenin köşegenleri diktir, eşittir, açıortaydır ve birbirini ortalar



- Karenin bir kenar uzunluğu a ise ;

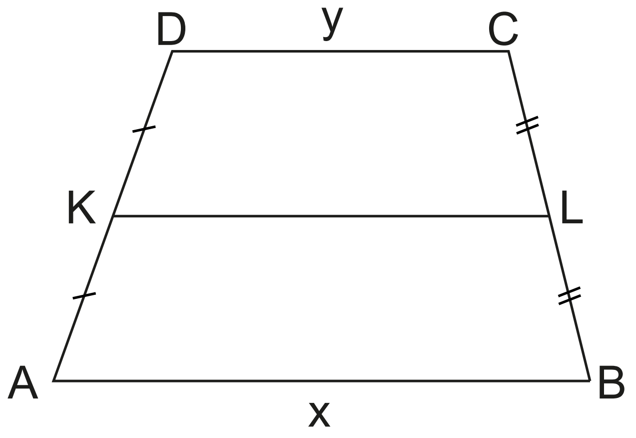
$Ç = 4a$ $A = a^2$dir.

YAMUK



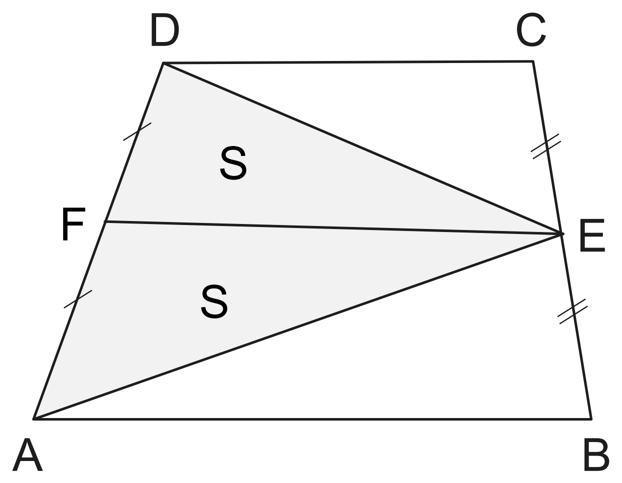
- Herhangi iki kenarı paralel olan dörtgene yamuk denir.
- Paralel kenarlara taban, paralel kenarlar arasındaki dik uzaklığa yükseklik denir.
- Bir yamuğun alanı; taban uzunlukları toplamının yarısı ile yüksekliğin çarpımıdır.

$$A(ABCD) = \frac{(x+y)}{2} \cdot h\text{'dir.}$$



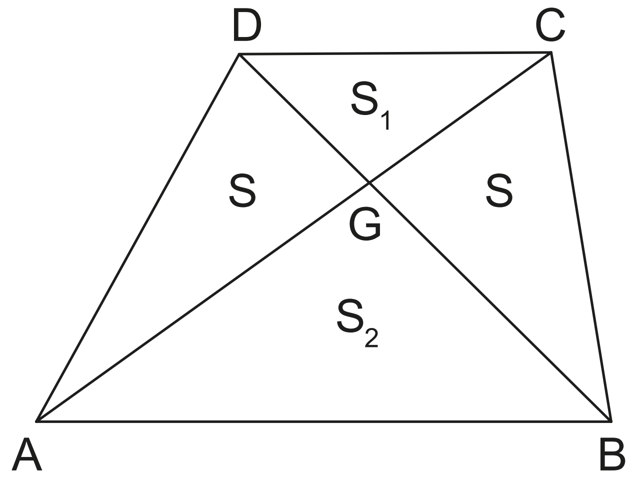
- Paralel olmayan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına orta taban denir.

$|KL| = \frac{x+y}{2}$'dir.



- ABCD bir yamuk, E ve F bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere;
- $A(ABCD) = 4S$ ise,

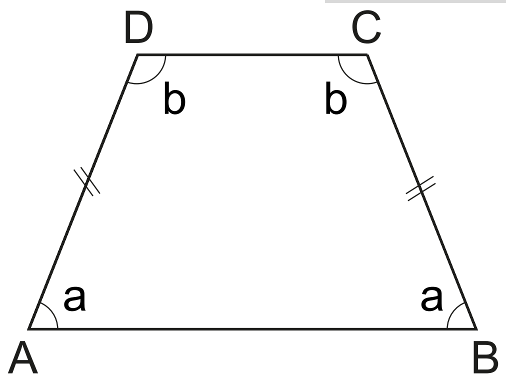
  $A(\widehat{DAE}) = 2S$,
- $A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{FAE}) = S$'dir.



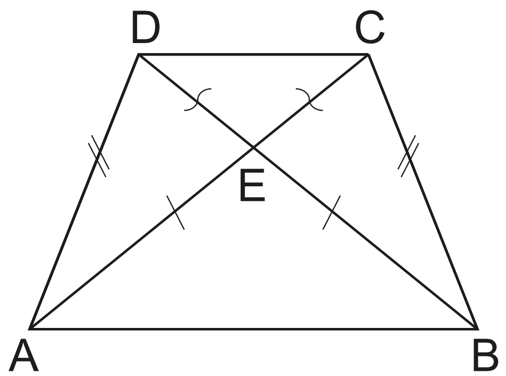
- ABCD yamuğunda [AC] ve [DB] köşegen olmak üzere;
- $A(\widehat{AGD}) = A(\widehat{CGB}) = S$,
- $A(\widehat{DGC}) = S_1$,
- $A(\widehat{AGB}) = S_2$ ise;

$$S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$

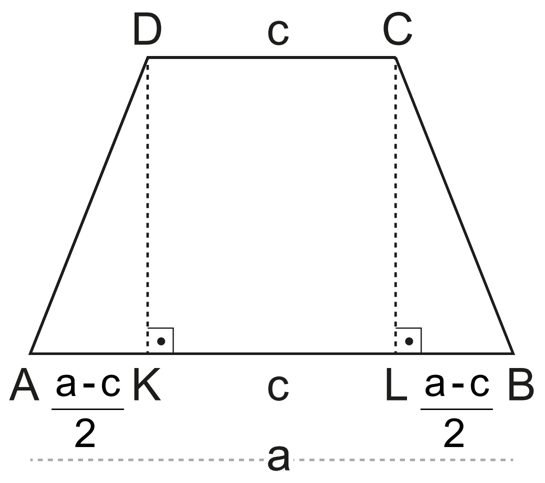
İKİZKENAR YAMUK



- Taban açıları ve paralel olmayan kenar uzunlukları eşit olan yamuğa ikizkenar yamuk denir.

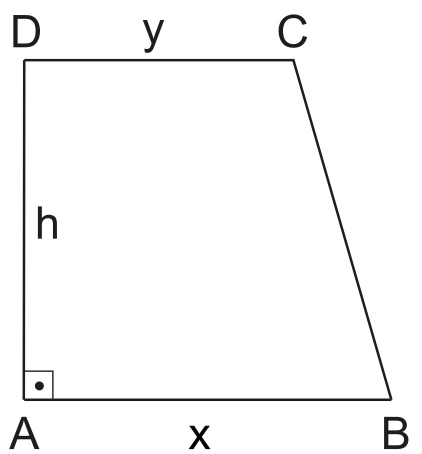


- İkizkenar yamukta köşegen uzunlukları birbirine eşittir.
- $|AC| = |DB|$ $\quad |AE| = |BE|$ $\quad |DE| = |CE|$



- ABCD ikizkenar yamuk ve $|AB| = a$, $|DC| = c$ ise;

$$|AK| = \frac{a-c}{2} = |LB|$$



- Bir açısı 90° olan yamuğa dik yamuk denir.

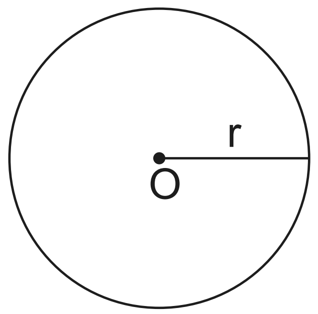
$A(ABCD) = \frac{(x+y)\cdot h}{2}$'dir.

ÇEMBER VE DAİRE

ÇEMBER VE DAİRE

Çember

- Düzlemdeki bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesine **çember** denir.
- O noktasına merkez, merkez ile çember arasındaki uzaklığa **yarıçap(r)** denir.



Birim Çember

- Yarıçapı 1 birim olan çembere denir.
-

Teğet

- Bir çembere yalnız bir noktadan dokunan doğruya teğet denir.
-

Kesen

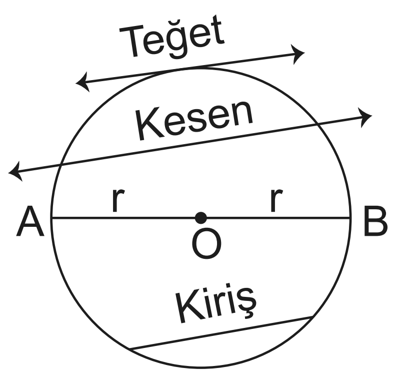
- Bir çemberi iki noktada kesen doğruya kesen denir.

Kiriş

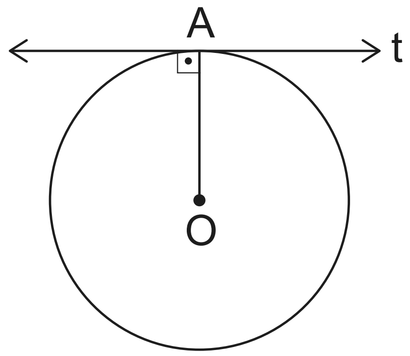
- Çember üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçasına kiriş denir.
-

Çap

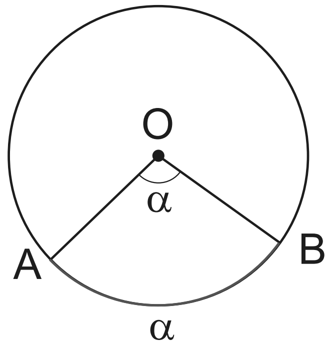
- Merkezden geçen kiriş çaptır. Çap çemberdeki en uzun kiriştir.



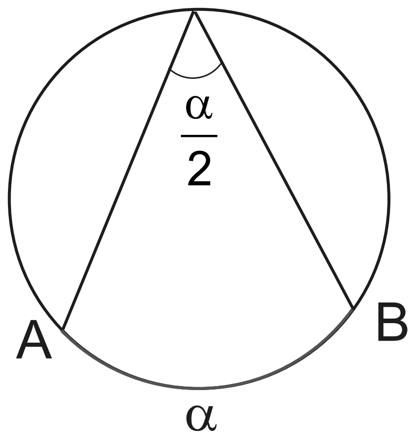
Çemberde Açılarla İlgili Özellikler



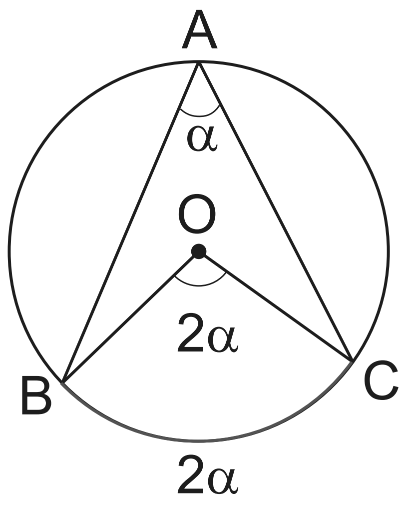
•Merkezden teğet değme noktasına indirilen doğru parçası teğet doğrusuna diktir.



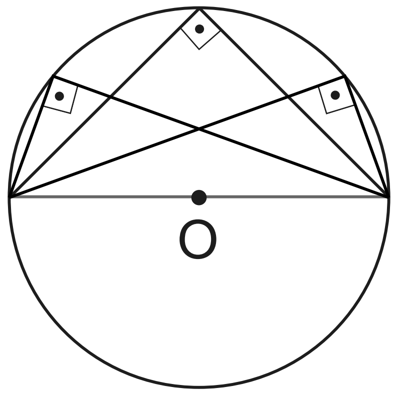
- Merkezde köşesi olan açı merkez açıdır. Merkez açı gördüğü yaya eşittir.



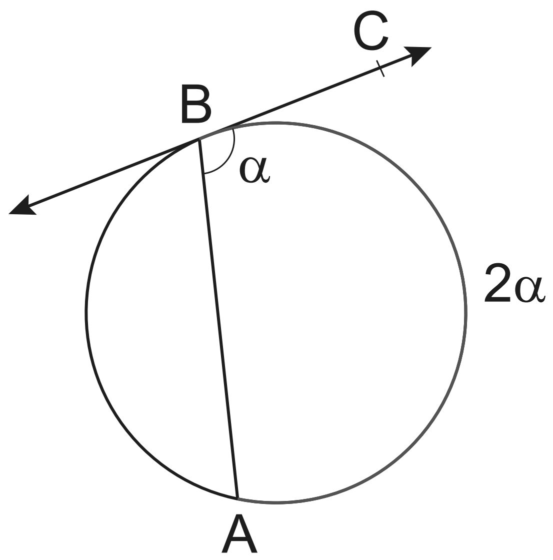
• Köşesi çember üzerinde olan açıya çevre açı denir. Çevre açının ölçüsü gördüğü yayın yarısıdır.



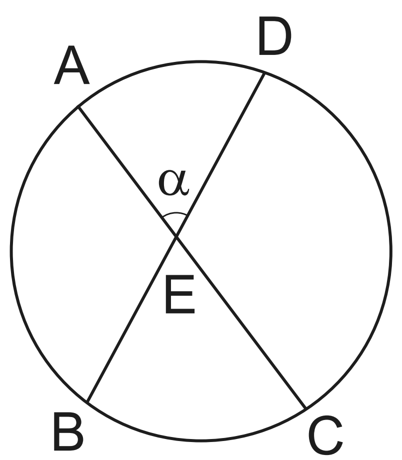
• Aynı yayı gören merkez açı çevre açının 2 katıdır.



• Çapı gören çevre açı 90°dir. Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşittir

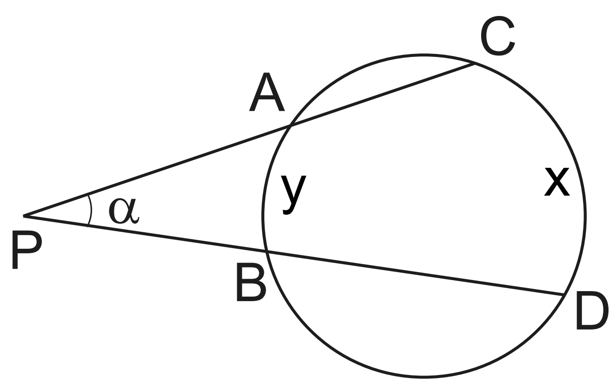


Köşesi çember üzerinde olan, bir teğet, ile kirişin meydana getirdiği açıya teğet kiriş açı denir. Ölçüsü gördüğü yayın yarısıdır.



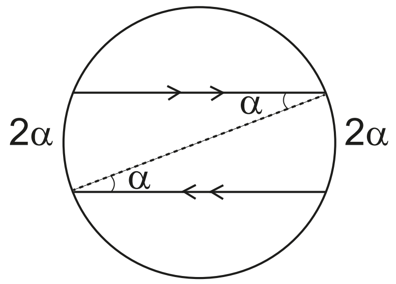
Çemberde kesişen iki kirişin arasında kalan açıya iç açı denir.

$$\alpha = \frac{s\left(\overparen{AD}\right) + s\left(\overparen{BC}\right)}{2}$$

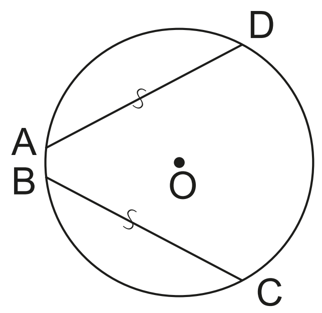


Çemberin dışında kesişen iki kesenin arasında kalan açıya dış açı denir.

$$\alpha = \frac{x - y}{2} = \frac{s\left(\overparen{CD}\right) - s\left(\overparen{AB}\right)}{2}$$

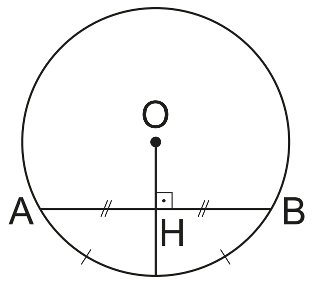


• Çemberde kirişler paralel ise kirişler arasında kalan yayların ölçüleri birbirine eşittir.

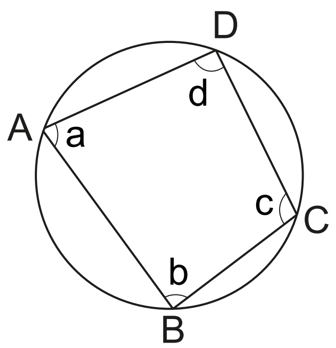


• Çemberde iki kiriş uzunluğu eşit ise bunların ayırdıkları yay uzunlukları da birbirine eşittir.

• $|AD| = |BC| \Rightarrow s\left(\overset{\frown}{AD}\right) = s\left(\overset{\frown}{BC}\right)$

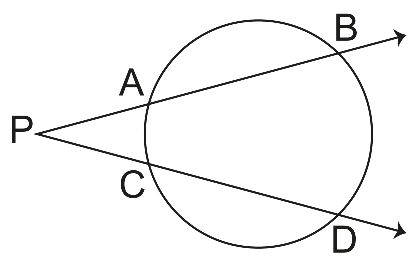


• Merkezden kirişe indirilen dikme, kirişi ortalar ve kirişin ayırdığı yayı iki eş parçaya böler.



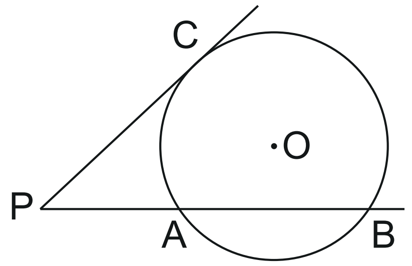
• Köşeleri çember üzerinde olan dörtgene kirişler dörtgeni denir.

• $a + c = b + d = 180°$'dir.



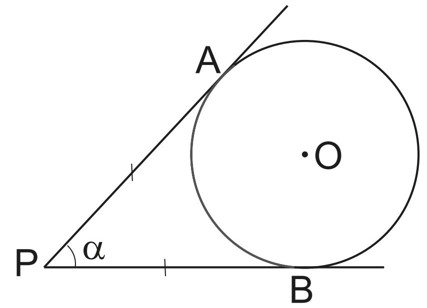
Çemberin dışındaki bir noktadan çembere kesenler çizilirse,

$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$



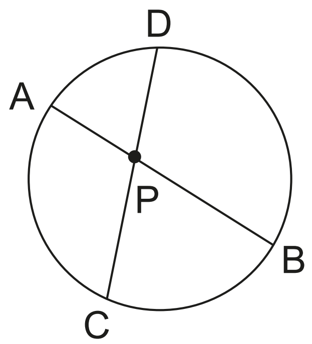
Çembere çizilen teğet ve kesen sonucunda oluşacak uzunluklar için;

$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$

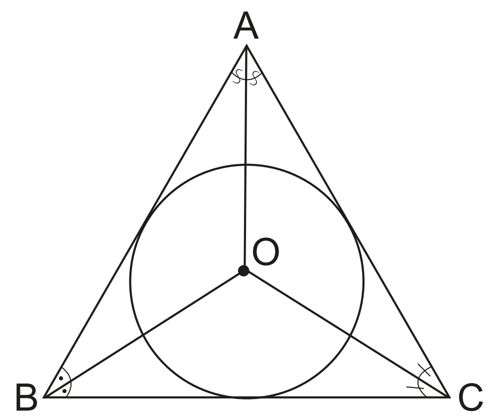


Bir noktadan çembere teğetler çizilir ise;

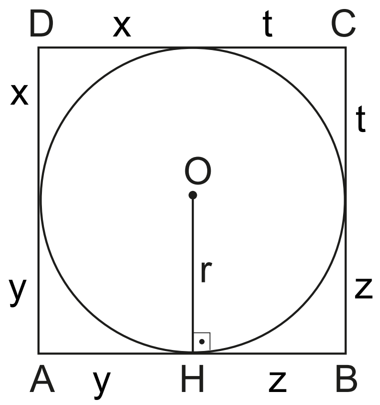
$|PA| = |PB|$ olur.



$|PA| . |PB| = |PC| . |PD|$



- Üçgenin iç teğet çemberinin merkezi, açıortayların kesişim noktasıdır.

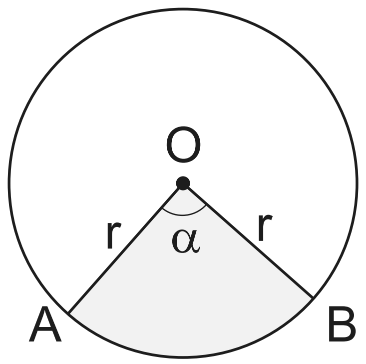


Dört kenarı aynı çembere teğet olan dörtgene teğetler dörtgeni denir.

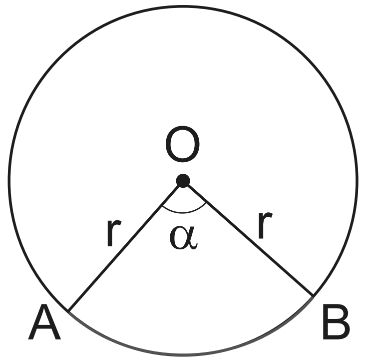
- $|DC| + |AB| = |DA| + |CB|$
  $Ç(ABCD) = 2u$
  $A(ABCD) = u \cdot r$

DAİRE

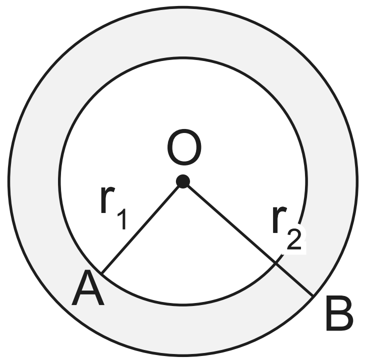
- Çember ve iç bölgesinin birleşimi ile oluşan geometrik şekle daire denir.
- Dairenin Alanı $= \pi \cdot r^2$
- Dairenin Çevresi $= 2 \cdot \pi \cdot r$



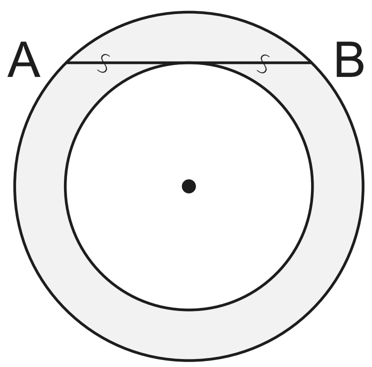
- O merkezli r yarıçaplı daire diliminin alanı $= \pi \cdot r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360}$



- O merkezli r yarıçaplı çember yayının uzunluğu; $|\overset{\frown}{AB}| = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \dfrac{\alpha}{360}$



- O merkezli r_1 ve r_2 yarıçaplı daireler arasında kalan daire halkasının alanı r_2 yarıçaplı dairenin alanından r_1 yarıçaplı dairenin alanının çıkarılması ile bulunur.
- $\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right)$

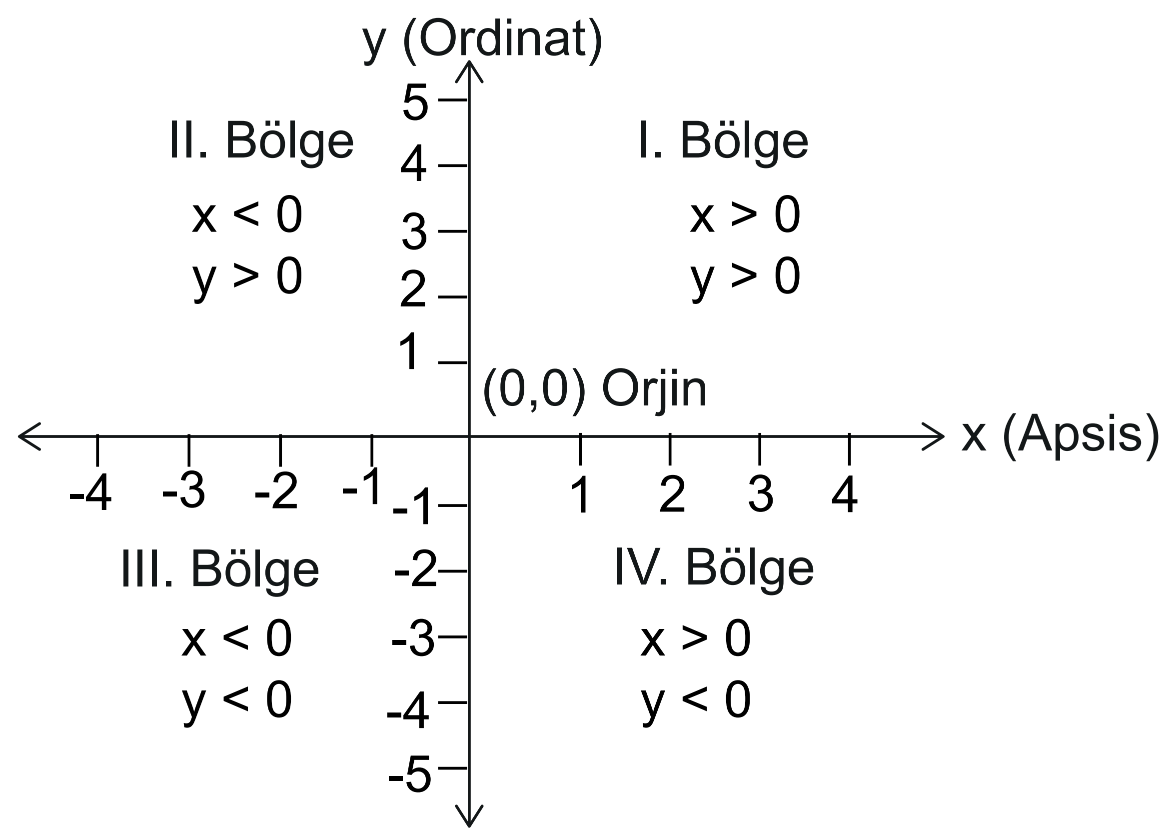


- Şekildeki gibi [AB] teğet doğru parçasının uzunluğu verilirse;
- Taralı alan $= \dfrac{\pi \cdot |AB|^2}{4}$ olur.

ANALİTİK GEOMETRİ

ANALİTİK GEOMETRİ

Koordinat Sistemi



Birbiri ile dik kesişen iki sayı doğrusunun oluşturduğu ifade koordinat düzlemidir. Kesiştikleri nokta (0,0) orijin, dikey eksen (y) ordinat yatay eksen (x) apsis, birincisi x ekseninden ikincisi y ekseninden alınan her (a, b) ifadesine sıralı ikili denir. Koordinat düzlemindeki bölgeler ve bu bölgelerdeki x ve y bileşenlerinin işaretleri şekilde gösterilmiştir. Koordinat düzlemindeki her noktaya bir sıralı ikili karşılık gelir.

İki Nokta Arasındaki Uzaklık

- $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ ise;

AB noktaları arasındaki uzaklık; $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

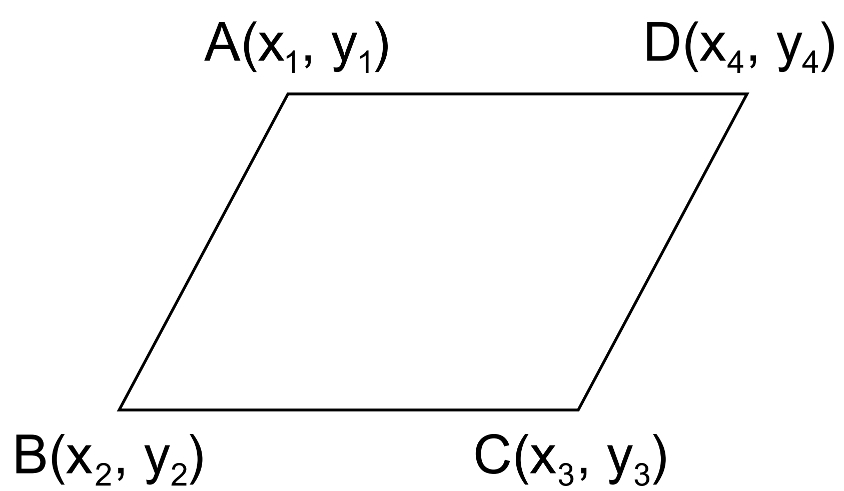
Doğru Parçasının Orta Noktası

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Köşeleri A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) Olan Üçgenin Ağırlık Merkezi

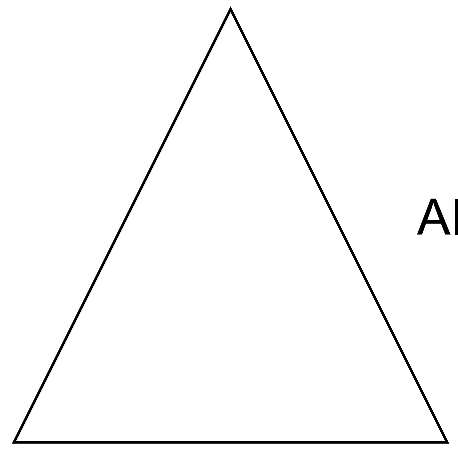
$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Paralelkenarın Köşe Koordinatları



ABCD paralelkenar ise; $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$, $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$

ÜÇGENDE ALAN



$$\text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3) \right]$$

EĞİM

Bir doğrunun 0x ekseni ile yaptığı pozitif yöndeki açının tanjantıdır.

İki Noktası Bilinen Doğrunun Eğimi

- $A(x_1, y_1)$ $\quad$ $B(x_2, y_2)$ $\quad$ $\text{Eğim}_{AB} = M_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

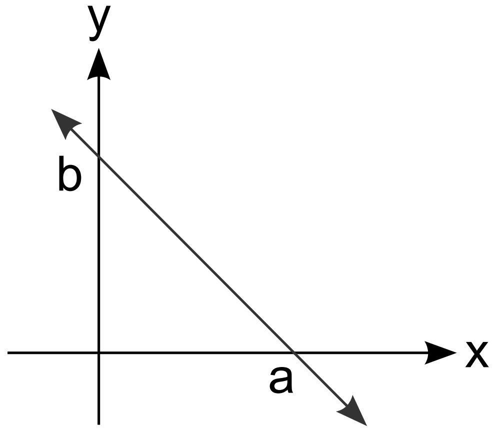
Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğru Denklemi

- Eğim $= m$ $\quad$ $A(x_1, y_1)$ $\quad$ $y - y_1 = m(x - x_1)$

İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi

- $A(x_1, y_1)$ $\quad$ $B(x_2, y_2)$ $\quad$ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

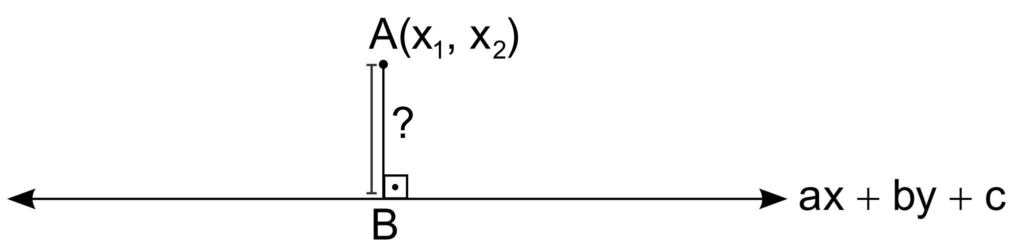
Eksenleri Kestiği Noktalar Bilinen Doğru Denklemi



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

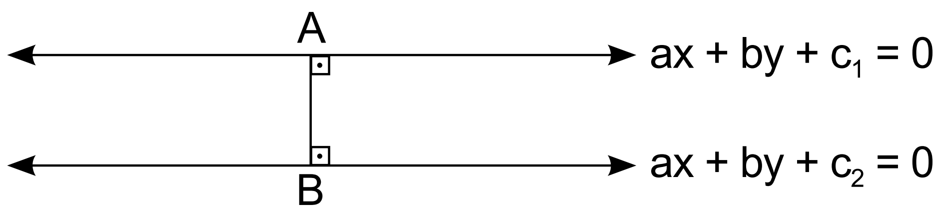
- $ax+by+c=0$ doğrusunun eğimi $-\frac{a}{b}$'dir.
- $y=mx+n$ doğrusunun eğimi m'dir.
- Paralel iki doğrunun eğimleri eşittir.
- Dik doğruların eğimleri çarpımı –1'dir.
- Doğru üzerindeki her noktaya karşılık gelen sıralı ikili doğru denkleminin bir köküdür.
- İki doğrunun kesiştiği noktanın koordinatları iki denklemin ortak çözümü ile bulunur.

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı



$$|AB|=\frac{|a\cdot x_1+b\cdot y_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık



$$|AB| = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Noktanın Simetrisi

A(a, b) olmak üzere A noktasının;

- Orijine göre simetriği $(-a, -b)$
- $x = y$ doğrusuna göre simetriği (b, a)
- $x = -y$ doğrusuna göre simetriği $(-b, -a)$
- Ox eksenine göre simetriği $(a, -b)$
- Oy eksenine göre simetriği $(-a, +b)$

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

$d_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$d_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ ise}$$

- d_1 ve d_2 doğruları yalnız bir noktadan kesişir.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ ise}$$

- d_1 ve d_2 doğruları çakışıktır ve sistemin sonsuz çözümü vardır.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ ise}$$

d_1 ve d_2 doğruları paraleldir ve hiçbir noktada kesişmezler sistemin çözüm kümesi, boş kümedir.

ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r} y+2x=1 \\ 2y+x=4 \end{array}\right\}$ doğrularının kesim noktasından geçen ve y = x doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\left.\begin{array}{r} y+2x=1 \\ 2y+x=4 \end{array}\right\}$ doğrularının kesim noktasını bulalım.

$$\begin{array}{r} -2\,/\; y+2x=1 \\ 2y+x=4 \\ \hline -3x=2 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3} \end{array}$$

$y=\frac{7}{3} \Rightarrow P(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$ noktası doğruların kesim noktasıdır. Bu noktadan geçen doğru y = x doğrusuna paralel ise doğrunun eğimi y = x doğrusunun eğimine eşittir. O halde m = 1'dir.

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - \frac{7}{3} = 1(x + \frac{2}{3}) \Rightarrow y - \frac{7}{3} = x + \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x - y + 3 = 0 \Rightarrow x - y = -3$ bulunur.

ÖRNEK

$3x + 4y - 5 = 0$ ve $-6x - 8y + 20 = 0$ doğruları arasındaki uzaklık kaç br'dir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} -2/ \quad 3x + 4y - 5 &= 0 \\ -6x - 8y + 20 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -6x - 8y + 10 &= 0 \\ -6x - 8y + 20 &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan doğruların eğimleri eşittir. Doğrular paraleldir.

$$\ell = \frac{|c - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|20 - 10|}{\sqrt{(-8)^2 + (-6)^2}} = \frac{10}{10} = 1 \text{ br olur.}$$

ÖRNEK

(–2, 0) noktasının $x = -3$ doğrusuna göre simetriği A(a, b) ise A noktasının orijine olan uzaklığı kaç br'dir?

ÇÖZÜM

(–2, 0) noktasının $x = -3$ doğrusuna göre simetriği (2 (–3) – (–2)) ise A(–4, 0) noktasıdır.

A noktasının orijine uzaklığı 4 birimdir.

KATI CİSİMLER

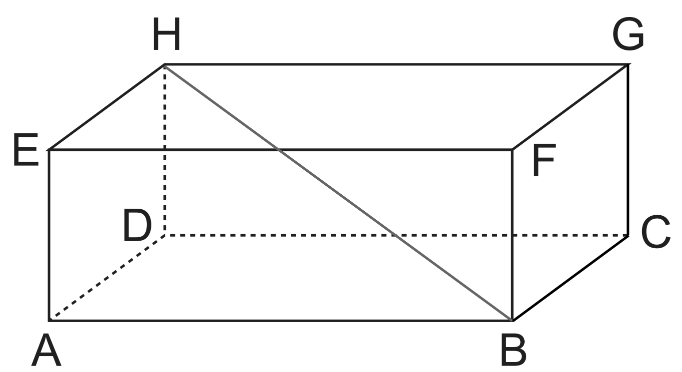
PRİZMA

• Paralel iki kapalı şeklin karşılıklı elemanlarının birleştirilmesi ile oluşan cisme **prizma** denir. Prizmalar tabanlarına göre isimlendirilir. Bir prizmanın hacmi, taban alanı ve yüksekliğini çarpımı ile bulunur.

Prizma Hacmi = Taban Alanı x Yükseklik

Dikdörtgenler Prizması

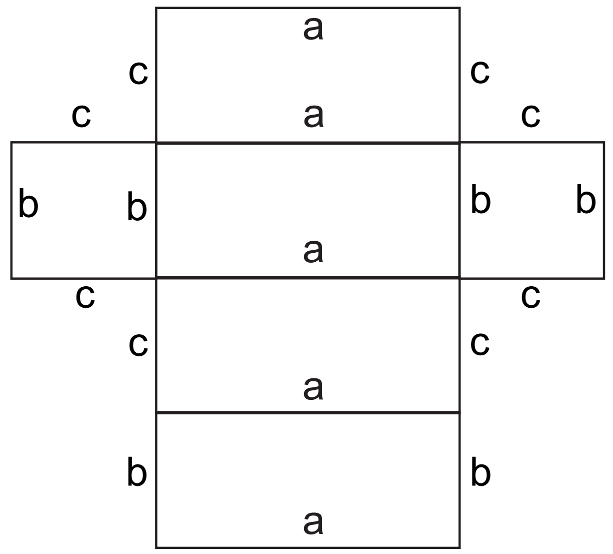
• Taban yüzeyleri dikdörtgen olan prizmaya dikdörtgenler prizması denir.



• Ayrıt uzunlukları a, b, c olan dikdörtgenler prizmasının hacmi;

V = Taban Alanı x Yükseklik = $a \cdot b \cdot c$'dir.

- Dikdörtgen prizmanın açınımı;



- Açık hali verilen dikdörtgen prizmanın tüm yüzey alanı;

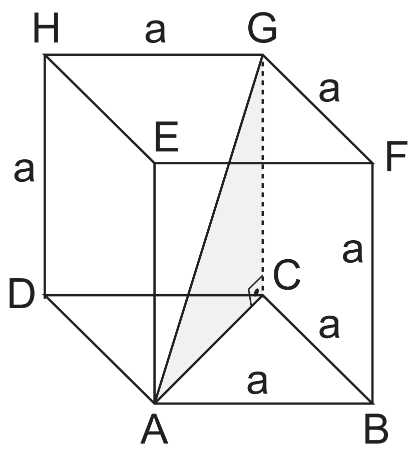
$A = 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c$'dir.

$A = 2(ab + ac + bc)$

- Dikdörtgenler prizmasının yüzeylerini oluşturan dikdörtgenlerin köşegenlerine **yüzey köşegenleri** denir.
- Dikdörtgenler prizmasındaki en uzak iki köşeyi birleştiren doğru parçasına cisim köşegeni denir. Ayrıtları a, b, c olan dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeninin uzunluğu; $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$dir.

KÜP

- Tüm ayrıt uzunlukları birbirine eşit olan dikdörtgenler prizmasına **küp** denir. Küpün tüm yüzeyleri karesel bölgedir. Bir ayrıtı 1 birim olan küpe **birim küp** denir.



Bir ayrıtı a olan küpün;

Yüzey alanı $= 6 \cdot a^2$

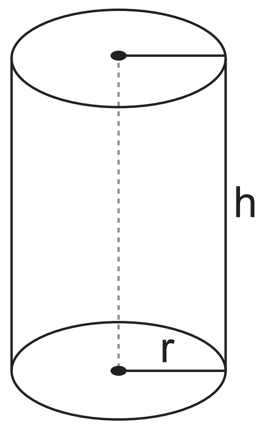
Hacim $= a^3$

Yüzey köşegeni $= a\sqrt{2}$

Cisim köşegeni $= a\sqrt{3}$

SİLİNDİR

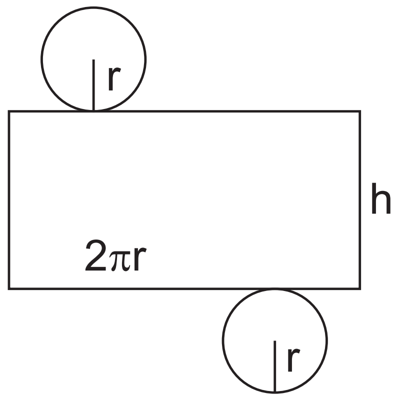
- Tabanları daire biçimindeki prizmalara **silindir** denir.



Silindirin Hacmi (V) = Taban Alanı x Yükseklik

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

- Silindirin açınımı;



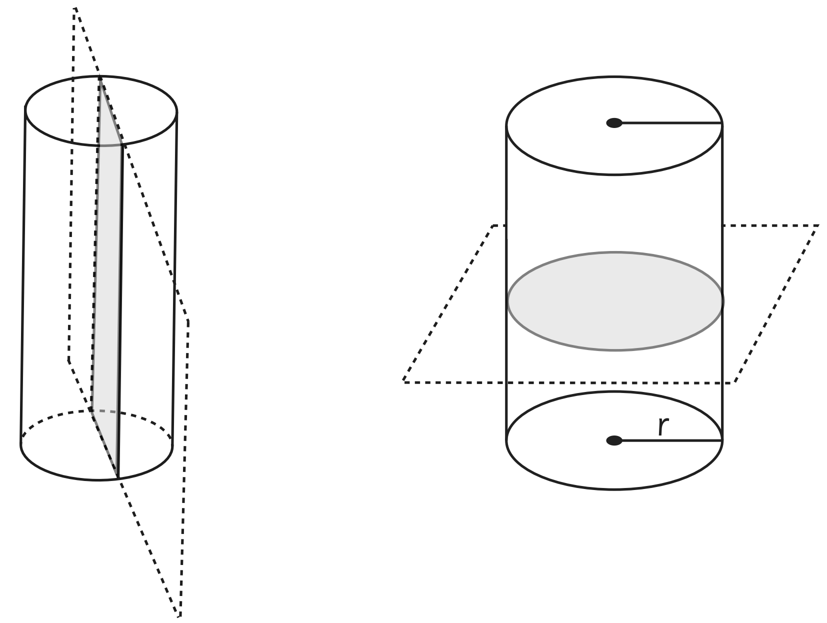
Silindirin yanal alanı = Taban çevresi x Yükseklik

$$\text{Yanal Alan} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

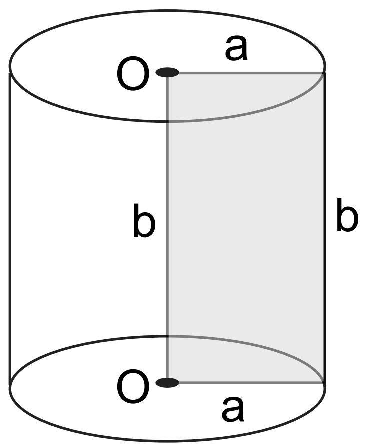
$$\text{Taban Alan} = 2\pi \cdot r^2$$

$$\text{Tüm Alan} = 2\pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

- Bir dairesel silindir tabana paralel bir düzlem ile kesilir ise ara kesiti tabana eş bir dairesel bölge olur.
- Bir dairesel silindir tabana dik bir düzlem ile kesilir ise düzlem ile silindirin ara kesiti bir dikdörtgensel bölge olur.

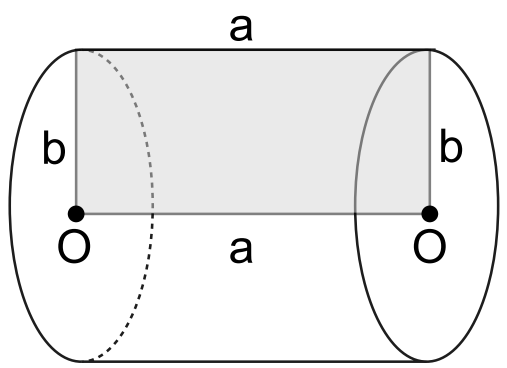


- Bir dikdörtgenin bir kenarı etrafında 360 döndürülmesiyle oluşan silindire **dönel silindir** denir.
- a, b kenar uzunluğuna sahip dikdörtgenin b kenarı etrafında döndürülmesi ile oluşan silindirin hacmi;



$V = \pi \cdot a^2 \cdot b$

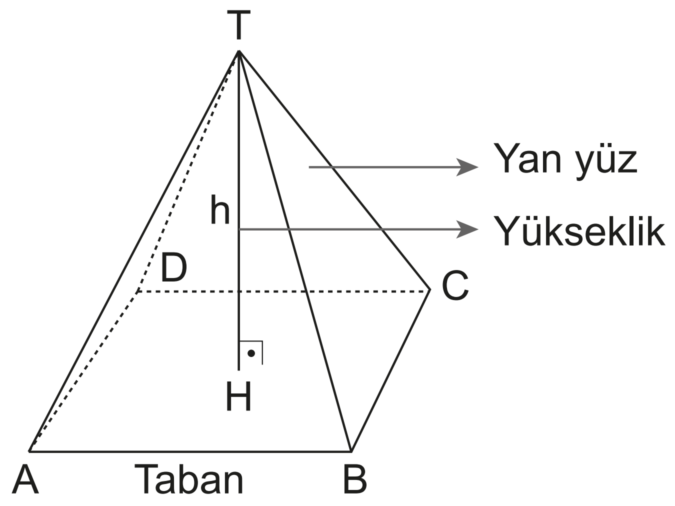
- a kenarı etrafında döndürülmesi ile oluşan silindirin;



Hacmi $= \pi \cdot a \cdot b^2$

PİRAMİT

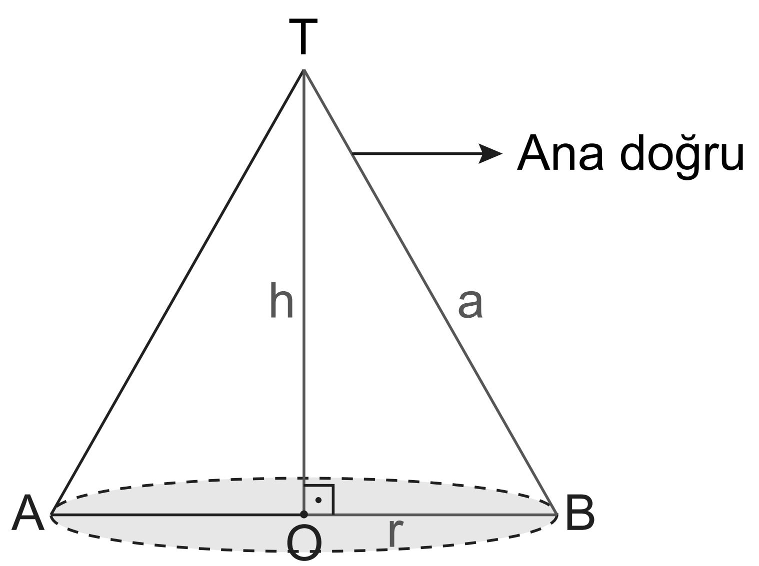
- Bir çokgensel bölgenin bulunduğu düzlemin dışındaki bir noktadan bu çokgensel bölgenin köşelerine doğru parçaları indirilerek elde edilen üç boyutlu cisme **piramit** denir.



$$\text{Piramitin hacmi} = \frac{\text{Taban Alanı x Yükseklik}}{3}$$

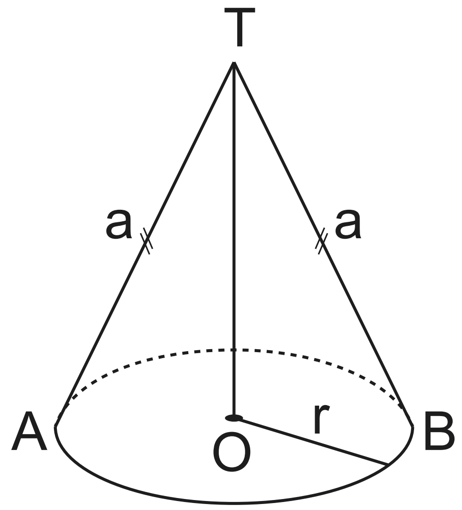
KONİ

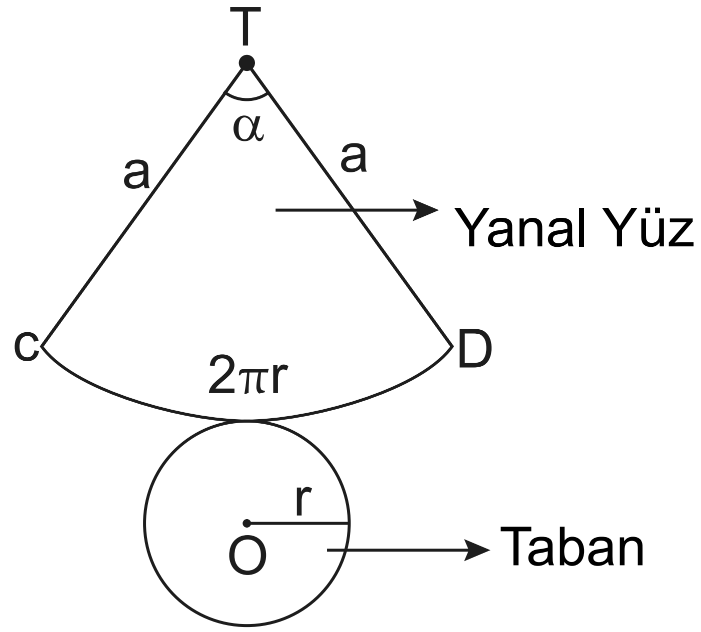
- Tabanı daire olan piramide **koni** denir.



- Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan dik koninin hacmi; $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$'tür.

Dik Koninin Alanı





Koni açınımı

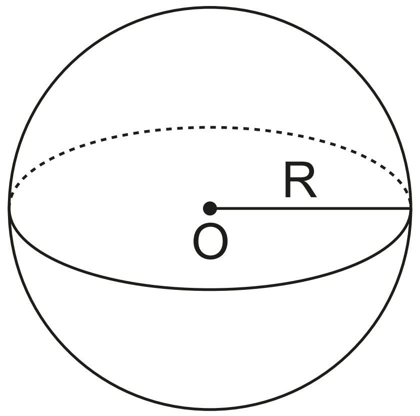
$$\text{Yanal Alan} = \pi \cdot a \cdot r$$

$$\text{Taban Alan} = \pi \cdot r^2$$

$$\text{Tüm Alan} = \pi \cdot a \cdot r + \pi \cdot r^2$$

KÜRE

- Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesine **küre** denir.



- Bu sabit nokta (O) kürenin merkezi, sabit uzaklık (r) kürenin yarıçapıdır.

$$\text{Hacmi} = V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\text{Alan} = A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$